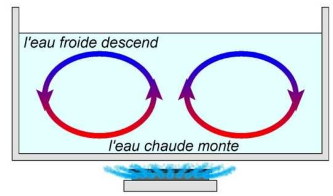
Chapitre th 4 : diffusion thermique

I. Les trois modes de transfert thermique

Convection :

Les différences de températures au sein d'un fluide engendrent des différences de masse volumique: les fluides chauds sont ...moins... denses donc ils ...montent......., les fluides froids sont ...plus....... denses donc ils ...descendent...... Il se crée des mouvements de fluide appelés mouvements de convection qui sont très efficaces pour rendre la température homogène.



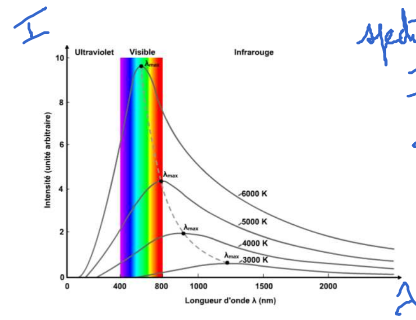
Diffusion :

La conduction (ou diffusion) thermique, est un mode de transfert thermique provoqué par une différence de températures, elle se produit des ...fortes..... vers les ...faibles........ températures. La diffusion cesse lorsque la température est...uniforme..... La diffusion thermique se réalise sans déplacement de matière à l'échelle macroscopique contrairement à la convection, grâce à la transmission de proche en proche de l'agitation thermique.

Remarque: Dans un fluide, quand la température n'est pas homogène, la diffusion et la convection se produisent en même temps, souvent dans ce cas on néglige la diffusion devant la convection car la convection est beaucoup plus efficace.

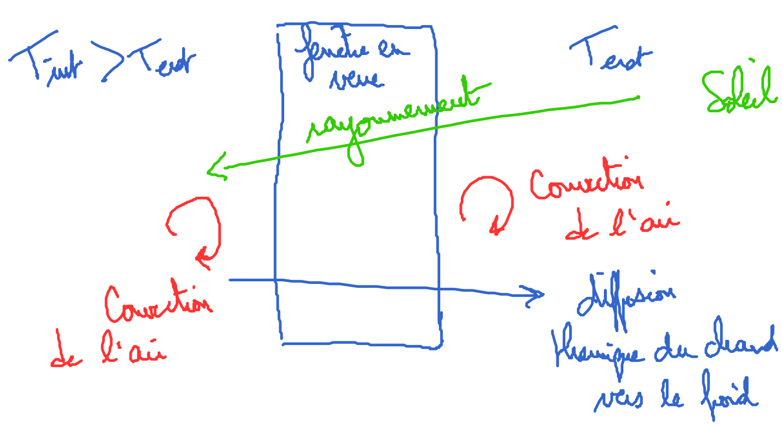
Dans un solide, quand la température n'est pas homogène, seule la diffusion se produit.

Rayonnement : c'est un transport d'énergie sans mouvement macroscopique du support. Les particules chargées qui composent la matière se mettent en mouvement sous l'effet de l'agitation thermique et émettent un champ électromagnétique qui transporte (ou rayonne) de l'énergie. Le rayonnement est le seul transfert thermique qui peut se propager dans le vide.



spectre du corps noir : I (intensité émise) dépend de λ et de T (température du corps)

Remarque: dans un système physique, ces trois modes se produisent souvent simultanément, prenons l'exemple d'une fenêtre:



II. Premier principe de la thermodynamique

L'énergie interne d'un système peut varier pour plusieurs raisons:

- Le système peut échanger du transfert thermique avec le milieu extérieur

- Le système peut être le siège de réactions chimiques ou nucléaires exothermiques (qui produisent de l'énergie), l'énoncé donne p l'énergie thermique produite par unité de volume et de temps.

- Le système peut être le siège de réactions chimiques ou nucléaires endothermiques (qui prélèvent de l'énergie au l'énergie), l'énoncé donne a l'énergie thermique absorbée par unité de volume et de temps.

- pour une phase condensée (liquide ou solide), on néglige les variations de volume donc le travail échnagé est nul.

On note:

δQ_e: le transfert thermique qui entre dans le système entre t et t + dt

δQ_s: " " sort " "

δQ_p: le transfert thermique produit entre t et t + dt

δQ_a: " absorbé "

En régime variable, le bilan local d'énergie entre t et $t + dt$ s'écrit grâce au 1er principe de la thermo appliqué au système :

♡ $$dU = +(\delta Q_e + \delta Q_p) - (\delta Q_s + \delta Q_a) + \cancel{\delta W}$$

on compte + ce qui est reçu par le système

on compte − ce qui est perdu par le système

En régime stationnaire, le bilan local d'énergie s'écrit: le transfert thermique reçu par le système est égal au transfert thermique perdu soit :

♡ $$\delta Q_e + \delta Q_p = \delta Q_s + \delta Q_a \quad (dU = 0)$$

Remarque: le bilan local d'énergie ou l'éq. de conservation de l'énergie se trouve toujours en appliquant le 1er principe de la thermo

III. Les grandeurs physiques

1. Définitions

$T(M,t)$: température $\quad [T] = K$

$\overrightarrow{j_Q}(M,t)$: vecteur densité de courant thermique

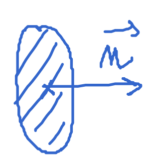
Son sens et sa direction sont le sens et la direction du transfert thermique

Sa norme représente l'énergie thermique par unité de surface et par unité de temps

$[j_Q] = J.m^{-2}.s^{-1}$ ou $W.m^{-2}$ $\qquad$ ♡ $W = J.s^{-1}$ puissance

Soit $\phi = \overrightarrow{j_Q}(M,t) S \overrightarrow{n}$ s'appelle le flux thermique (à travers la surface S orientée par le vecteur normal et unitaire $\overrightarrow{n}$).

Le flux représente la puissance thermique qui traverse S



Le flux est une grandeur algébrique:

positive si $\vec{j_Q}$ est dans le sens de $\vec{n}$

négative si $\vec{j_Q}$ est dans le sens contraire de $\vec{n}$

$$\boxed{\phi = P_{th} = \vec{j_Q} \cdot S\vec{n} = \pm j_Q S}$$

La quantité $\phi dt = \overrightarrow{j_Q}(x,t) S \vec{n}\, dt$ est égale au transfert thermique $\boxed{\delta Q = \mathcal{P}_{th}\, dt = \Phi\, dt = \pm j_Q S\, dt}$

Autres grandeurs :

ρ : masse volumique $\quad [\rho] = kg.m^{-3}$

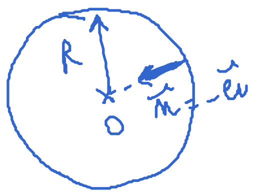
c : capacité thermique massique $\quad [c] = J.K^{-1}.kg^{-1}$

Variation d'énergie interne d'un système de volume V entre t et $t + dt$: $dU = \rho c V [T(M,t+dt) - T(M,t)]$

$= \rho c V \frac{\partial T}{\partial t} \times dt$

2. Utilisation du vecteur densité de courant thermique

Exp: on note $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(r,t)\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques. Exprimer le puissance reçue par la sphère de rayon R.

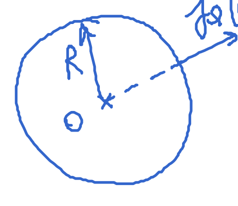


on prend $\vec{n} = -\vec{e_r}$ (vecteur qui entre dans la sphère car on calcule ce qui est reçu)

$\mathcal{P}_{th} = \overrightarrow{j_Q}(r=R,t)\, 4\pi R^2 (-\vec{e_r})$

$= -4\pi R^2 j_Q(R,t)$

OU

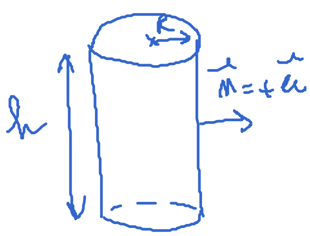


$\vec{j_Q}(R,t) = j_Q(R,t)\vec{e_r}$ (on représente $\vec{j_Q}$ avec $j_Q > 0$)

$\mathcal{P}_{th,\,sort} = j_Q(R,t)\, 4\pi R^2$

$\mathcal{P}_{th,\,entre} = -j_Q(R,t)\, 4\pi R^2$

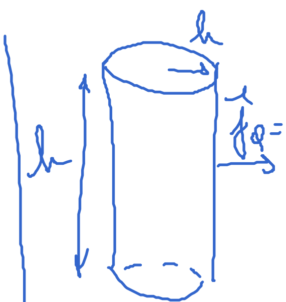
Exp: on note $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(r,t)\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées cylindriques. Exprimer le puissance perdue par le cylindre de rayon R et de hauteur h.



on prend $\vec{n} = +\vec{e_r}$ (vecteur sortant du cylindre car on calcule la puissance perdue)

$\mathcal{P}_{th,\,perdue} = \vec{j_Q}(R,t)\vec{e_r} \cdot 2\pi R h\, \vec{e_r} = j_Q(R,t)\, 2\pi R h$

ou



$\vec{j_Q} = j_Q(R,t)\vec{e_r}$

on représente $\vec{j_Q}$ avec $j_Q > 0$

$\vec{j_Q}$ est un vecteur sortant

donc $\mathcal{P}_{th,\,s} = j_Q(R,t)\, 2\pi R h$

IV. Loi de Fourier

C'est une loi phénoménologique qui s'écrit : $\boxed{\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T}$ où λ s'appelle la conductivité thermique du matériau.

A une dimension, lorsque la diffusion se produit selon l'axe Ox : $\vec{j_Q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\vec{e_x}$ ou $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

Unité de λ: $[\lambda] = \left[\frac{\|\vec{j_Q}\|}{\|\overrightarrow{\text{grad}}\, T\|}\right] = \left[\frac{j_Q}{\frac{\partial T}{\partial x}}\right] = \frac{J.m^{-2}.s^{-1}}{K.m^{-1}} = J.m^{-1}.K^{-1}.s^{-1}$ ou $W.m^{-1}.K^{-1}$

Ordres de grandeur de λ à connaître: bon isolant (air, eau) ; bon conducteur thermique (acier, cuivre)

milieu	air	eau	acier	cuivre
λ ($W.K^{-1}.m^{-1}$)	0,02	0,6	50	400

Que traduit cette loi?

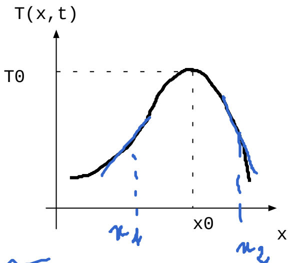
La diffusion se fait dans le sens de $-\vec{\text{grad}}\,T$ soit des fortes vers les faibles températures

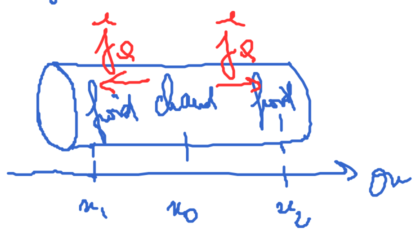
La diffusion cesse lorsque la température est uniforme.

La diffusion est d'autant + efficace que le matériau est bon conducteur thermique (λ grand)

et que les différences de T sont importantes ($\|\vec{\text{grad}}\,T\|$ grand)

Illustration graphique: $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ où $\frac{\partial T}{\partial x}$ est la pente de la tangente à la courbe





la diffusion thermique se fait du chaud vers le froid

$\vec{j}_Q(x_1)$ selon $-\vec{Ox}$

$\vec{j}_Q(x_2)$ selon $+\vec{Ox}$

$\frac{\partial T}{\partial x_1} > 0$ $\quad j_Q(x_1) < 0$

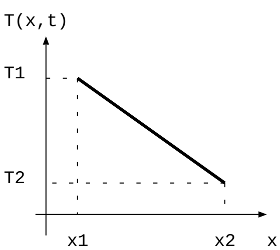
$\frac{\partial T}{\partial x_2} < 0$ $\quad j_Q(x_2) > 0$

Cas particulier important: T(x) est une fonction affine

$$j_Q = -\lambda \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2}$$

est indépendant de x, le flux thermique est le même en tout point

$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2}$ pente de la droite



V. Cas du régime stationnaire: notion de résistance thermique

1. Exemples de régime stationnaire:

Exemple 1: On étudie la diffusion thermique à travers la façade d'une maison en hiver, on note T_{ext} la température de l'air extérieur et T_{int} la température de l'air extérieur. Le transfert thermique se fait du chaud vers le froid, soit de l'intérieur vers l'extérieur de la maison.

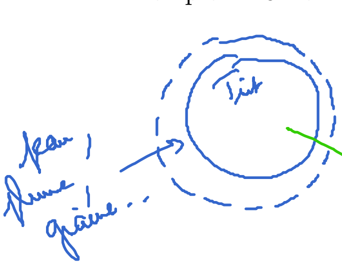
L'air extérieur reçoit du transfert thermique mais sa température est constante (on dit que l'atmosphère est un thermostat car il est de grande taille)

L'air intérieur perd du transfert thermique. L'hypothèse d'un régime stationnaire s'applique:

- soit en utilisant un chauffage qui apporte de l'énergie et permet de maintenir constante T_{int}

- soit en se plaçant sur des échelles de temps plus petites que les échelles de temps caractéristiques de la diffusion (par exemple si la variation de température dans la maison se fait sur des temps de l'ordre de quelques heures, donc si on me demande d'étudier les transferts thermiques à l'échelle de la minute, la température T_{int} n'a pas le temps de varier, l'hypothèse du régime stationnaire est valable).

Exemple 2: Un animal possède une température corporelle T_{int} supérieure à la température extérieure.



Text cste car l'atmosphère est de grande taille

en régime stationnaire : $P_{reçue} = P_{perdue}$

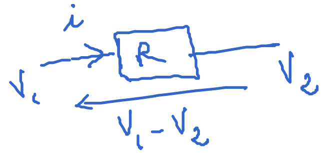
puissance reçue par le métabolisme

perdue par diffusion à travers la peau, les plumes.

2. Notion de résistance thermique

En régime stationnaire on observe que le flux thermique (ou puissance thermique) est proportionnelle à la différence de température. On en déduit donc la notion de résistance thermique par analogie avec l'électricité.

Conduction électrique



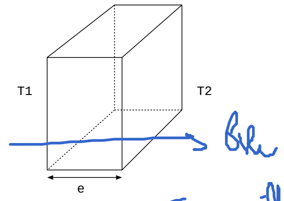
$U = V_1 - V_2$: différence de potentiel qui met en mvt les charges

$i = \frac{dq}{dt}$: flux de charges

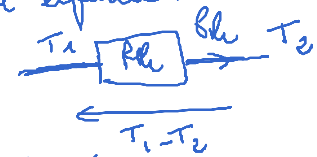
$\boxed{U = V_1 - V_2 = Ri}$ loi d'ohm

$[R] = \Omega = V.A^{-1}$

Conduction ou diffusion thermique



modèle équivalent



$\Delta T = T_1 - T_2$: différence de température qui crée la diffusion thermique

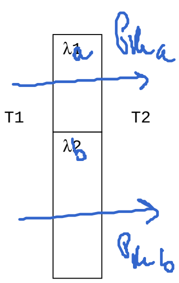
$\Phi_{th} = \phi = \frac{\delta Q}{dt}$: flux thermique

$$\boxed{T_1 - T_2 = R_{th} \times \Phi_{th} = R_{th} \times \phi}$$

$[R_{th}] = K.W^{-1}$ (n'est pas en ohm)

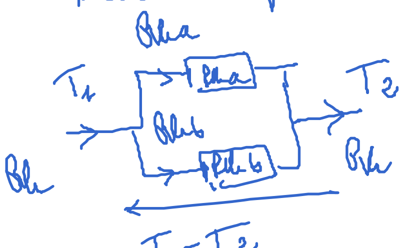
Rq : plus la résistance est grande et plus le système est isolant : il ne laisse pas bien passer le flux thermique

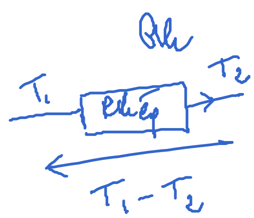
3. Association de résistances en série ou en parallèle



Soit deux parois soumises à la m̂ différence de température (même tension)
Elles sont traversées par des flux thermiques ≠ car elles n'ont pas la m̂ conductivité thermique (intensités ≠) : elles sont en parallèle

modèle électrique :



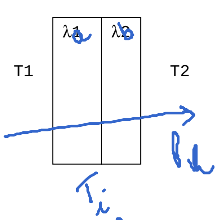


$\Phi_{th} = \Phi_{th\,a} + \Phi_{th\,b}$

$= \frac{T_1 - T_2}{R_{th\,a}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th\,b}}$

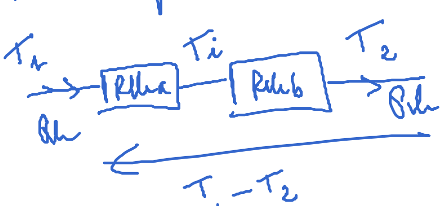
$$\boxed{\Phi_{th} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th\,éq}}}$$

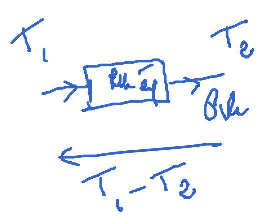
avec $\boxed{\frac{1}{R_{th\,éq}} = \frac{1}{R_{th\,a}} + \frac{1}{R_{th\,b}}}$ ♡



Deux parois sont parcourues par le même flux thermique (même intensité)
Elles sont soumises à des ≠ de températures ≠ (tension) : elles sont en série.

modèle équivalent :

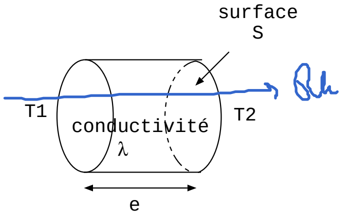




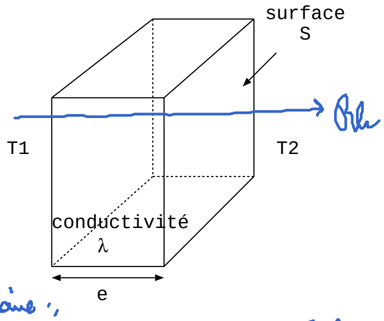
$$\boxed{\Phi_{th} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th\,éq}}}$$

avec $\boxed{R_{th\,éq} = R_{th\,1} + R_{th\,2}}$ ♡

4. Expression de la résistance thermique pour de la diffusion selon Ox



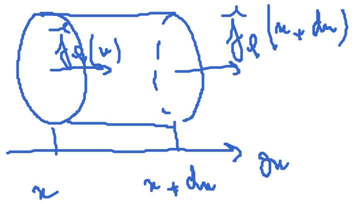
ou



modèle électrique :

Bilan thermique en régime stationnaire :

la puissance reçue est égale à la puissance perdue



soit $\Phi_{th}(x) = \Phi_{th}(x+dx)$ Φ_{th} ne dépend pas de x

$j_Q(x)\cancel{S} = j_Q(x+dx)\cancel{S}$ j_Q ne dépend pas de x

Loi de Fourier : $j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$

1ère façon : $\Phi_{th} = j_Q \times S = -\lambda \frac{dT}{dx} S$ on sépare les variables : $\Phi_{th}\int_0^e dx = -S\lambda \int_{T_1}^{T_2} dT$

$\Phi_{th}\, e = S\lambda(T_1-T_2)$ soit $T_1 - T_2 = \frac{e}{\lambda S}\Phi_{th}$ soit $\boxed{R_{th} = \frac{e}{\lambda S}}$

2ème façon : $j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{j_Q}{\lambda}$ soit $T(x) = -\frac{j_Q}{\lambda}x + A$

$T(x=0) = T_1 = A$ $T(x=e) = T_2 = -\frac{j_Q e}{\lambda} + T_1$ soit $j_Q = \frac{\lambda}{e}(T_1 - T_2) \Rightarrow \Phi_{th} = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2)$

Rq : la résistance thermique est d'autant plus grande que le matériau est isolant, de grande épaisseur et de petite surface

5. Utilisation de la résistance thermique

Exemple 1: Soit un vitrage simple d'épaisseur $e = 5\ mm$, de conductivité thermique $\lambda = 1,15\ W.m^{-1}.K^{-1}$. La température de surface du vitrage intérieure est 22^0C, la température de surface du vitrage extérieure 10^0C. Calculer la résistance thermique du vitrage et le flux thermique dissipé à travers ce vitrage pour une surface de $10\ m^2$.

Exemple 2: Soit un mur de façade de surface totale 45 m^2 composé de $S_b = 40\ m^2$ de béton sur une épaisseur $e_b = 25\ cm$ et d'une fenêtre simple vitrage en verre d'épaisseur $e_v = 5\ mm$ et de surface $S_v = 5\ m^2$. La température extérieure est de -3^0C et la température intérieure de 20^0C. On donne les conductivités thermiques du béton $\lambda_b = 0,9\ W.m^{-1}.K^{-1}$ et du verre $\lambda_v = 1,2\ W.m^{-1}.K^{-1}$. Représenter le schéma électrique équivalent et calculer la puissance des pertes thermiques par ce mur de façade. *Réponse :* $P = 31\ kW$

Exemple 3: Le mur d'un four industriel comporte trois couches de matériaux différents accolées les unes aux autres :

- Une couche de briques réfractaires à l'intérieur du four ($\lambda_1 = 1,21\ SI$)

- Une couche de revêtement calorifuge ($\lambda_2 = 0,08\ SI$)

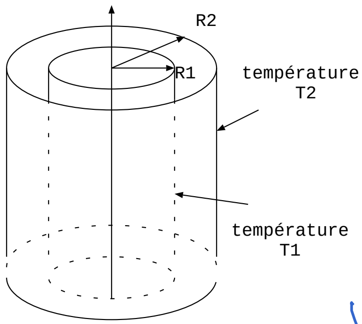
- Une couche de briques à l'extérieur du four ($\lambda_3 = 0,69\ SI$)

Chaque couche a une épaisseur $e = 10\ cm$. La température est de $T_i = 850^0\ C$ à l'intérieur du four et de $T_e = 32^0\ C$ à l'extérieur.

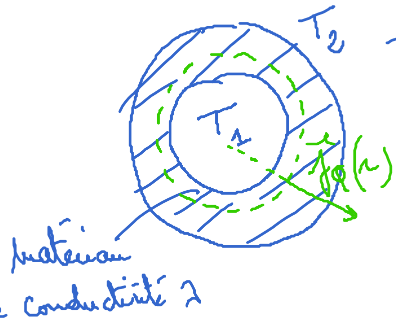
Utiliser une analogie électrique pour modéliser le système. La surface du mur est de 10 m^2, calculer l'énergie perdue par diffusion pendant 24 heures? Quelle est la température T_{12} à l' interface brique réfractaire-revêtement calorifugé et la température T_{23} à l'interface brique-revêtement calorifugé au milieu du revêtement? *Réponses :* $R_{tot} = 0,148\ SI,\ P = 5,5\ kW,\ T_{12} = 804^0C,\ T_{23} = 115^0C$

On cherche $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th}}$

6. Expression de la résistance thermique en symétrie cylindrique



Vue de dessus :



La diffusion est radiale : $T = T(r)$ et $\vec{j}_Q(r) = j_Q(r).\vec{e}_r$

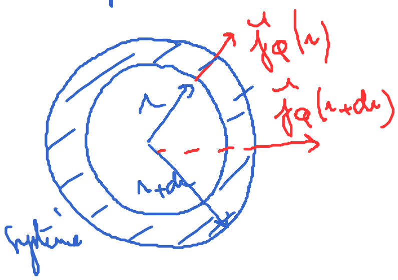
si $T_1 > T_2$: $j_Q > 0$

si $T_2 > T_1$: $j_Q < 0$

car la diffusion se fait des fortes vers les faibles températures

On note $\Phi_{th}(r)$ la puissance thermique à travers la sphère de rayon r : $\Phi_{th}(r) = j_Q(r)\, 2\pi r h$

Soit le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$ (avec $r > R_1$ et $r+dr < R_2$)



En régime stationnaire : la puissance reçue est égale à la puissance perdue soit : $\Phi_{th}(r) = \Phi_{th}(r+dr)$

donc Φ_{th} ne dépend pas de r c'est une constante

$$\Phi_{th} = j_Q(r)\, 2\pi r h = cste$$

Loi de Fourier : $j_Q = -\lambda \frac{dT}{dr}$ soit $\Phi_{th} = -\lambda\, 2\pi r h \frac{dT}{dr}$

1ère façon : on sépare les variables et on intègre : $\Phi_{th}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = -\lambda\, 2\pi h \int_{T_1}^{T_2} dT$

soit $\Phi_{th} \ln\frac{R_2}{R_1} = -\lambda\, 2\pi h (T_2 - T_1)$ soit $T_1 - T_2 = \underbrace{\frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi h \lambda}}_{R_{th}} \Phi_{th}$

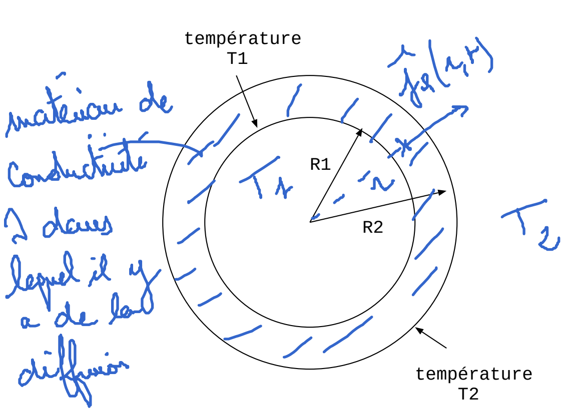
2ème façon : $\frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi_{th}}{2\pi r h \lambda}$ d'où $T(r) = -\frac{\Phi_{th}}{2\pi h \lambda}\ln r + A$

$T(r=R_1) = -\frac{\Phi_{th}}{2\pi \lambda h}\ln R_1 + A = T_1$ $\quad$ $T(r=R_2) = -\frac{\Phi_{th}}{2\pi \lambda h}\ln R_2 + A = T_2$

$$T_1 - T_2 = +\frac{\Phi_{th}}{2\pi \lambda h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

La résistance thermique est d'autant plus grande que le matériau est isolant (λ petit).

7. Expression de la résistance thermique en symétrie sphérique



La diffusion est radiale on a :

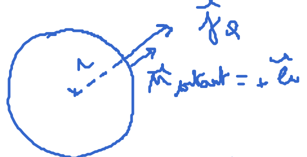
$$\begin{cases} T = T(r,t) \\ \vec{j}_Q = j_Q(r,t)\,\vec{e}_r \end{cases} \quad \text{pour } R_1 \leq r \leq R_2$$

si $T_1 > T_2$: $j_Q > 0$

si $T_1 < T_2$: $j_Q < 0$

On cherche R_{th} en fonction de R_1, R_2 et λ définie par $R_{th} = \dfrac{T_1 - T_2}{\mathcal{P}_{th}}$

$\mathcal{P}_{th}(r)$: puissance thermique perdue par la sphère de rayon r avec $R_1 \leq r \leq R_2$



$$\mathcal{P}_{th}(r) = \vec{j}_Q(r) \times S\,\vec{n}_{sortant} = j_Q(r)\,\vec{e}_r \times 4\pi r^2 \times \vec{e}_r = j_Q(r)\,4\pi r^2$$

Montrons qu'en régime stationnaire $\mathcal{P}_{th}$ ne dépend pas de r :

Soit le système élémentaire compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$ avec $r \geq R_1$ et $r+dr \leq R_2$

En régime stationnaire la température du système est cste.

$$dU = 0 = \cancel{\delta W} + P_{th}(r) \times dt - P_{th}(r+dr)\,dt$$

d'où $P_{th}(r) = P_{th}(r+dr)$ donc $\underline{P_{th} \text{ est une cste}}$

On applique la loi de Fourier : $\vec{j}_Q(r) = -\lambda\,\vec{\text{grad}}\,T(r) = -\lambda \dfrac{dT}{dr}\,\vec{e}_r$

$$P_{th} = j_Q(r)\,4\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 \quad \text{on sépare les variables et on intègre :}$$

$$4\pi\lambda \int_{T(r=R_1)=T_1}^{T(r=R_2)=T_2} dT = P_{th} \int_{R_1}^{R_2} -\frac{dr}{r^2} \quad \text{donc} \quad 4\pi\lambda (T_2 - T_1) = P_{th}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

d'où

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{P_{th}} = \frac{(T_1 - T_2)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{4\pi\lambda (T_1 - T_2)} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2}}$$

Rq : Expression de $T(r)$: $P_{th} = -\lambda \dfrac{dT}{dr} 4\pi r^2$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{P_{th}}{4\pi\lambda r^2} \quad \text{d'où} \quad T(r) = +\frac{P_{th}}{4\pi\lambda r} + A$$

$$\text{C.L.} \left.\begin{array}{l} T(r=R_1) = \dfrac{P_{th}}{4\pi\lambda R_1} + A \\ T(r=R_2) = \dfrac{P_{th}}{4\pi\lambda R_2} + A \end{array}\right\} \quad \text{on en déduit } A \text{ et } P_{th}$$

VI. Cas du régime stationnaire: contact solide-liquide

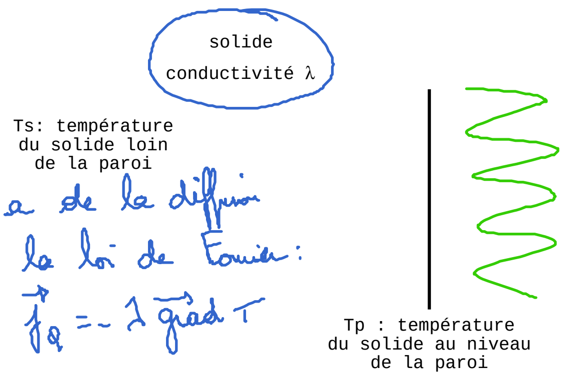
1. Conditions aux limites à une interface solide-liquide: loi de Newton

Dans un solide, le transfert thermique ne se fait que par diffusion (ou conduction) selon la loi de Fourier

Dans un fluide, le transfert thermique se fait principalement par convection (la diffusion est négligeable devant la convection)

(la diffusion se produit en même temps que la convection mais la diffusion est beaucoup plus lente et beaucoup moins efficace donc on peut la négliger).

Que se passe-t-il à l'interface solide-fluide?



il y a de la diffusion selon la loi de Fourier: $\vec{j}_Q = -\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$

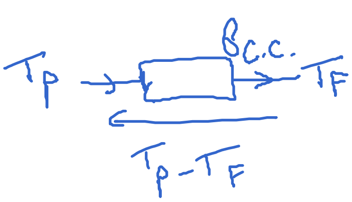
dans cette zone la température n'est pas homogène il y a de la conduction et de la convection : $j_{th} = h(T_p - T_f)$

$$[h] = \left[\frac{j}{T}\right] = \frac{J.m^{-2}s^{-1}}{K} = W\,m^{-2}K^{-1}$$

La loi de Newton (donnée dans les énoncés) s'écrit: $j_{th} = h(T_p - T_f)$: c'est l'énergie reçu par le fluide par conducto-convection.

h est le coefficient de transfert qui dépend du milieu (liquide ou gaz) et de la présence ou non de courants qui facilitent les transferts thermiques (h grand)

2. Résistance associée au transport conducto-convectif



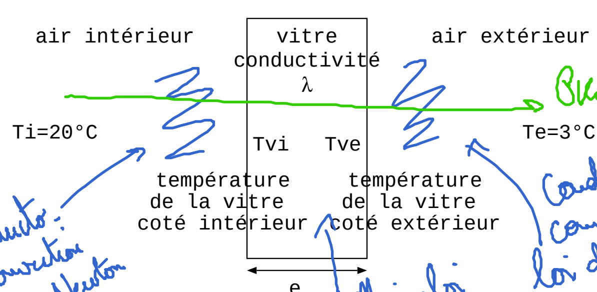
$$\Phi_{C.C} = j_{th} \times S = hS(T_p - T_F)$$

soit $T_p - T_F = \frac{1}{hS} \times \Phi_{CC}$

$R_{C.C} = \frac{1}{hS}$ est la résistance des effets conducto-convectifs

3. Exemple de situation réelle:

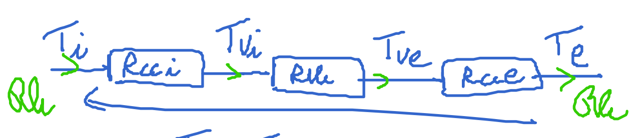
Modèle électrique:



conducto-convection loi de Newton R_{cci}

diffusion: loi de Fourier R_{th}

Conducto convection loi de Newton R_{cce}



$$\Phi_{th} = \frac{T_i - T_e}{R_{cci} + R_{th} + R_{cce}}$$

VII. **Bilan local d'énergie**

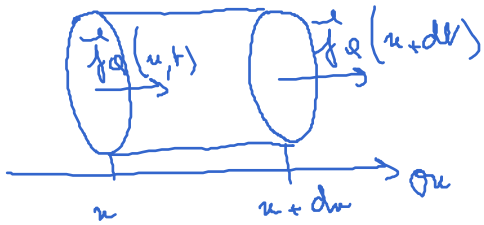
L'objectif de ce paragraphe est d'établir l'équation locale traduisant la conservation de l'énergie en présence de diffusion et éventuellement en présence de sources internes de productions d'énergie, pour des situations où la température ne dépend que d'une coordonnée d'espace.

1. *Cas où la diffusion se produit selon Ox*

La diffusion se produit selon Ox dans un système de section S (surface perpendiculaire à la direction Ox). On note $T(x,t)$ la température en x à l'instant t et $\overrightarrow{j_Q}(x,t) = j_Q(x,t)\overrightarrow{e_x}$. On note p la production d'énergie par unité de volume et de temps.

On considère le système élémentaire compris entre x et $x+dx$ de section S.

volume du système : $d\tau = S\,dx$



On applique. le 1er principe de la thermo au système entre t et $t+dt$:

$$dU = \rho S\,dx \times c \times \left(T(x,t+dt) - T(x,t)\right) = \cancel{\delta W} + \delta Q$$

$$\rho S\,dx\, c \frac{\partial T}{\partial t} \times dt = + j_Q(x,t) S\,dt - j_Q(x+dx,t) S\,dt + p\, S\,dx\,dt$$

$$= -\frac{\partial j_Q}{\partial x} S\,dt\,dx + p\,S\,dx\,dt$$

$$\text{d'où } \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} + p$$

Remarque 1: dans le cas d'un régime stationnaire sans production d'énergie:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ et } p = 0 \quad \text{on a} \quad \frac{\partial j_Q}{\partial x} = 0$$

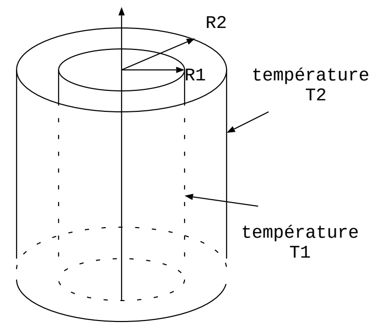
Remarque 2: dans le cas où la diffusion se produit selon Ox, Oy et Oz soit $T = T(x,y,z,t)$ et $\overrightarrow{j_Q}(x,y,z,t) = j_{Qx}\overrightarrow{e_x} + j_{Qy}\overrightarrow{e_y} + j_{Qz}\overrightarrow{e_z}$, l'équation de conservation de l'énergie devient:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} - \frac{\partial j_{Qy}}{\partial y} - \frac{\partial j_{Qz}}{\partial z}}_{-\mathrm{div}\,\vec{j_Q}} + p$$

Rq 3: on en déduit l'éq. de diffusion.

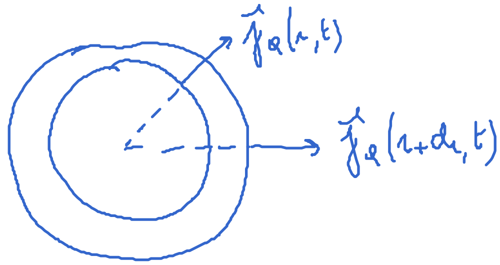
$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} + p \\ \text{loi de Fourier : } j_Q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{\lambda}{\rho c}}_{\text{coefficient de diffusion}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p}{\rho c}$$

2. *Cas où la diffusion est radiale dans un cylindre*



On note $T(r,t)$ la température en r à l'instant t et $\overrightarrow{j_Q}(r,t) = j_Q(r,t)\overrightarrow{e_r}$. On note p l'énergie produite par unité de volume et de temps.

On considère le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$ avec $r \geq R_1$ et $r + dr \leq R_2$.



volume : $d\tau = 2\pi r h\, dr$

on note : ρ masse volumique

c capacité thermique

On applique le 1er principe de la thermo à ce système entre t et $t+dt$

$$dU = \rho\, 2\pi r h\, dr\, c\,\left[T(r,t+dt) - T(r,t)\right] = \cancel{\delta W} + \delta Q_{\text{reçu}} - \delta Q_{\text{perdu}}$$

avec $\delta Q_{\text{reçu}} = j_Q(r,t)\, 2\pi r h\, dt + p\, d\tau$

$\delta Q_{\text{perdu}} = j_Q(r+dr,t)\, 2\pi (r+dr) h\, dt$

$$\rho c\, \cancel{2\pi} \underbrace{r}\, \cancel{h}\, \cancel{dr}\, \frac{\partial T}{\partial t} \cancel{dt} = -\cancel{2\pi}\, \cancel{h}\, \cancel{dt}\, \cancel{dr}\, \frac{\partial}{\partial r}\left[j_Q(r,t)\, r\right] + p\, \cancel{2\pi}\, \cancel{h}\, \underbrace{r}\, \cancel{dt}\, \cancel{dr}$$

d'où $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[j_Q(r,t)\, r\right] + p$ avec $j_Q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r}$ (loi de Fourier)

donc $$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \times \underbrace{\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right]}}_{\Delta T} + \frac{p}{\rho c}}$$

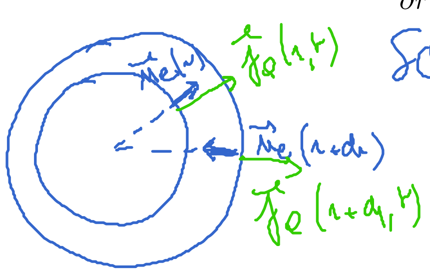
éq. de diffusion avec production d'énergie

Remarque: dans le cas d'un régime stationnaire sans production d'énergie: $\Delta T = 0$ ou $\dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{dT}{dr}\right] = 0$

$\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$ $\qquad p = 0$

$\dfrac{1}{r}\dfrac{dT}{dr} = A \qquad \dfrac{dT}{dr} = \dfrac{A}{r} \qquad T = A \ln r + B$

Remarque: dans certains sujets de concours, on demande de montrer que la puissance reçue par le système élémentaire s'écrit: $\delta Q_e = 2\pi dr h \dfrac{\partial}{\partial r}(j_Q(r) r^2)$.

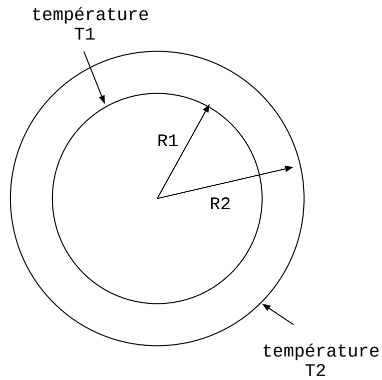


$$\delta Q_e = \Phi_{\text{entrant}}\, dt = \underset{\vec{j}_Q\cdot\vec{n}_e > 0}{+}\, j_Q(r,t)\, 2\pi r h\, dt\ \underset{\vec{j}_Q\cdot\vec{n}_e < 0}{-}\, j_Q(r+dr,t)\, 2\pi (r+dr) h\, dt$$

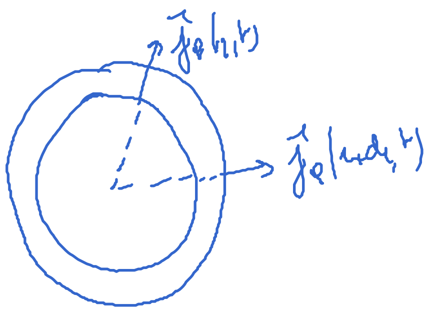
$$= 2\pi h \frac{\partial}{\partial r}\left[r \times j_Q(r,t)\right] \times dr\, dt$$

3. *Cas où la diffusion est radiale dans une sphère*

On note $T(r,t)$ la température en r à l'instant t et $\overrightarrow{j_Q}(r,t) = j_Q(r,t)\overrightarrow{e_r}$. On note p l'énergie thermique produite par unité de volume et de temps.



On considère le système élémentaire compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$:



Volume : $d\tau = 4\pi r^2 dr$

ρ : masse volumique

c : capacité thermique massique

On applique le 1er principe de la thermo entre t et $t+dt$ au système fermé.

$$dU = \rho\, 4\pi r^2 dr\, c\left[T(r,t+dt) - T(r,t)\right] = \cancel{\delta W} + \delta Q_{reçu} - \delta Q_{perdu}$$

avec $\delta Q_{reçu} = p \times 4\pi r^2 dr\, dt + j_Q(r,t)\, 4\pi r^2 dt$

$\delta Q_{perdu} = j_Q(r+dr,t)\, 4\pi (r+dr)^2 dt$

d'où $$\rho \cancel{4\pi} r^2 c \cancel{dr} \frac{\partial T}{\partial t} \cancel{dt} = \cancel{4\pi dr dt}\, r^2 p + \cancel{4\pi dt}\left[-\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 j_Q(r,t)\right]\right]\cancel{dr}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 j_Q(r,t)\right]$$ avec $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$ loi de Fourier

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho c} + \frac{\lambda}{\rho c}\,\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right]}$$

ΔT

Remarque: dans le cas d'un régime stationnaire sans production d'énergie: $\Delta T = 0$ ou $\frac{d}{dr}\left[r^2 \frac{dT}{dr}\right] = 0$

$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ et $p = 0$

$r^2 \frac{dT}{dr} = A$ $\quad \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r^2}$ $\quad T = -\frac{A}{r} + B$

Remarque: dans certains sujets de concours, on demande de montrer que la puissance reçue par le système élémentaire s'écrit: $\delta Q_e = 4\pi dr \frac{\partial}{\partial r}(j_Q(r) r^2)$.

VIII. **Equation de diffusion en régime variable sans production d'énergie**

L'équation de diffusion est l'équation différentielle aux dérivées partielles vérifiées par la température. On la trouve en combinant la loi de Fourier et le premier principe de la thermodynamique (dite équation bilan local d'énergie).

1. *Cas de la diffusion à 1D selon Ox.*

La loi de Fourier s'écrit: $\vec{j}_Q = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T(x,t)$ $\qquad j_Q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$

Le bilan local d'énergie s'écrit (sans production d'énergie): $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}$

On a donc: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{\rho c} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ $\qquad D = \dfrac{\lambda}{\rho c}$: coeff. de diffusion ou diffusivité thermique

2. *Cas général à 3D*

La loi de Fourier s'écrit: $\vec{j}_Q = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$

Le bilan local d'énergie s'écrit (sans production d'énergie): $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}\, \vec{j}_Q$

On a donc: $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = +\lambda\, \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, T\right) = \lambda \Delta T$ $\qquad \boxed{\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{\rho c} \Delta T}$

Le Laplacien en coordonnées cartésiennes: $\Delta T = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

Le Laplacien en coordonnées cylindriques ou sphériques: donné par l'énoncé

3. *Commentaires sur l'équation de diffusion*

Que devient cette équation lorsqu'on change t en $-t$? Commenter.

Calculer un ordre de grandeur du temps de diffusion: Les murs d'une maison sont construits en béton et ont pour épaisseur $d = 20\ cm$. La température extérieure est de 0^0C et la température intérieure est initialement 20^0C. Donner un ordre de grandeur du temps de diffusion thermique à travers ces murs. Données: $\rho = 2200\ kg.m^{-3}$, $\lambda = 0,8\ W.K^{-1}.m^{-1}$ et $c = 880\ J.kg^{-1}.K^{-1}$.

Que devient cette équation en régime stationnaire?

$\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$ soit $\boxed{\Delta T = 0}$