

# DS 4 de physique

Le sujet comprend quatre exercices indépendants à traiter dans l'ordre de votre choix. La feuille d'annexe est à rendre avec la copie. Il est demandé de numérotter les pages au format  $i/N$  où  $i$  est le numéro de la page et  $N$  le nombre de pages.

Il est demandé un effort de présentation (tirer un trait entre chaque question et encadrer les résultats) et de rédaction (prendre soin de nommer les lois utilisées, les hypothèses pour les appliquer et expliquer clairement).

## I. Turbine à gaz

Le biogaz provient principalement de la fermentation anaérobiose, c'est-à-dire sans oxygène, des déchets de l'agriculture, de l'industrie alimentaire et des ordures ménagères. À l'état brut, sa teneur en méthane est un peu supérieure à 50 %. Après une épuration poussée, il atteint le même niveau de qualité que le gaz naturel et porte alors le nom de bio-méthane ( $CH_4$ ). Il peut être valorisé par la production d'énergie électrique. Il est considéré comme une énergie renouvelable à part entière depuis plus de dix ans et sa combustion libère moins de  $CO_2$  que celle du fuel ( $C_{16}H_{32}$ ).

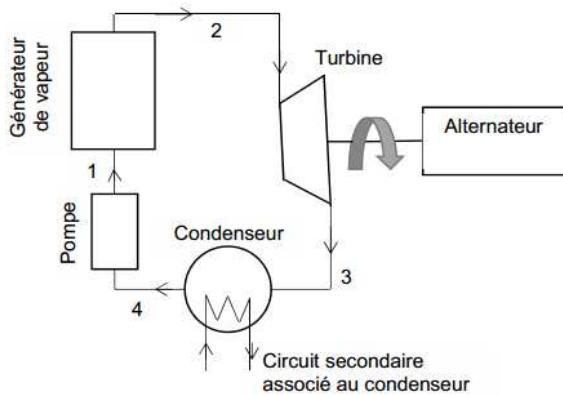
- Justifier, à l'aide des données fournies, que pour une même production d'énergie, la combustion du méthane libère moins de  $CO_2$  que celle du fuel.

Données: Pouvoir calorifique (énergie thermique libérée lors de la combustion d'une mole de carburant):

méthane :  $803 \text{ kJ.mol}^{-1}$

fuel :  $7\,600 \text{ kJ.mol}^{-1}$

On étudie ici une installation motrice dont le principe de fonctionnement est décrit sur la figure suivante.



Elle fonctionne en régime permanent suivant un cycle de Hirn. Le fluide utilisé est de l'eau. La pompe alimente le générateur de vapeur en liquide haute pression (point 1), on a  $P_1 = 10 \text{ bars}$ . Le liquide est porté à ébullition, puis totalement vaporisé, et enfin surchauffé de façon isobare par le brûleur au biométhane (point 2). La vapeur surchauffée se détend ensuite dans la turbine accouplée à un alternateur électrique (point 3). Au point 3, on a  $P_3 = 1 \text{ bar}$ , la vapeur est sous forme de vapeur saturante de titre massique en vapeur  $x_v = 1$ . La vapeur humide basse pression est totalement condensée, puis le liquide (point 4) est réintroduit dans la pompe. Un circuit secondaire, associé au condenseur et relié à une tour de refroidissement ou autre, permet d'extraire l'énergie issue du condenseur par transfert thermique.

Hypothèses :

- l'évolution dans la turbine est adiabatique et réversible
- l'évolution dans la pompe est supposée isenthalpique
- dans les bilans énergétiques, les variations d'énergie cinétique et potentielle du fluide seront négligées par rapport aux termes enthalpiques

- on néglige les pertes mécaniques de la turbine et le rendement de l'alternateur est considéré égal à 100 %

- Que dire de l'entropie qu cours de la transformation 2 – 3. Justifier votre réponse. Compléter le diagramme enthalpique de l'eau en annexe en y portant les points 1, 2, 3 et 4. Reproduire et compléter le tableau 1 sur votre copie.

	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4
$T ({}^{\circ}\text{C})$				
$P (\text{bar})$	10	10	1	1
Etat			vapeur saturante $x_v = 1$	liquide saturant $x_l = 1$
$h(\text{kJ.kg}^{-1})$				

- Exprimer en fonction des enthalpies massiques aux points 1, 2, 3 et 4 :

- le travail utile massique de la turbine  $w_{uT}$
- le transfert thermique massique  $q_{GV}$  échangé avec le générateur de vapeur
- le transfert thermique massique  $q_{cond}$  échangé avec le circuit secondaire associé au condenseur.

Évaluer numériquement  $w_{uT}$ ,  $q_{GV}$  et  $q_{cond}$ .

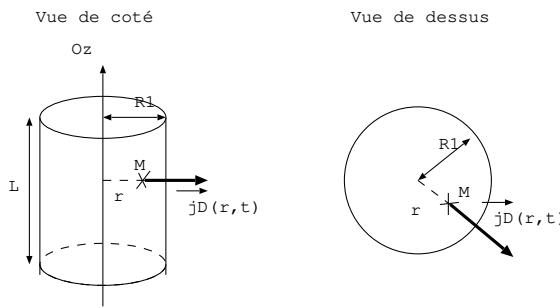
Représenter le schéma fonctionnel de cette machine et exprimer le rendement de l'installation. Faire l'application numérique.

4. Évaluer le débit massique en eau du circuit primaire, noté  $D_m$ , pour une production d'électricité d'une puissance  $P_{elec} = 250 \text{ kW}$ .

## II. Diffusion de neutrons

On étudie la diffusion de neutrons dans un barreau cylindrique d'axe  $Oz$ , de longueur  $L$  et de rayon  $R_1$ . Le matériau qui compose le barreau a pour coefficient de diffusion  $D$  et il absorbe les neutrons. On note:

- $n(r, t)$  la densité particulaire de neutrons à la distance  $r$  de l'axe  $Oz$  à l'instant  $t$
- $\vec{j}_D = j_D(r, t)\vec{e}_r$  le vecteur densité de courant de neutrons diffusés
- $K$  le nombre de neutrons par unité de volume et de temps absorbés par le matériau.  $K$  est une constante positive.



1. La diffusion de neutrons dans le matériau obéit à la loi de Fick. On donne  $\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_{\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$ .

Ecrire la loi de Fick et la simplifier dans le cas où  $n = n(r, t)$ . Donner le sens physique de cette loi.

2. Soit un système élémentaire compris entre les cylindres de même axe  $Oz$ , de même longueur  $L$  et de rayons  $r$  et  $r + dr$  avec  $r + dr < R_1$ .

2.a. Exprimer le volume  $d\tau$  de ce système.

2.b. Déduire d'un bilan de matière que l'on a  $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rj_D(r, t)) - K$ .

2.c. Dans toute la suite, on se place en régime permanent, simplifier cette équation. On la note (\*).

3. On note  $n_1$  la densité particulaire de neutrons en  $r = R_1$  et le vecteur densité de courant est défini pour toute valeur de  $r \leq R_1$ . Déduire de l'équation (\*) l'expression de  $j_D(r)$  et montrer que  $n(r)$  s'écrit  $n(r) = n_1 + \frac{K(r^2 - R_1^2)}{4D}$ . En déduire la densité particulaire minimale de neutrons dans le cylindre. Quelle condition doit vérifiée  $K$  pour que cette densité soit définie?

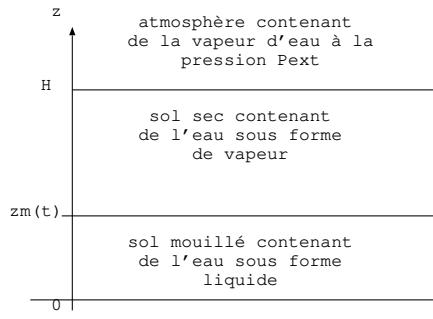
## III. Séchage des sols

On note  $T$  la température, supposée uniforme, de l'air extérieur situé en  $z > H$  et assimilable à un gaz parfait,  $R$  désigne la constante des gaz parfaits et  $N_a$  la constante d'Avogadro. La pression partielle de la vapeur d'eau dans l'atmosphère est notée  $P_{ext}$ .

On admet que, sous l'action de l'air extérieur, le sol s'assèche par sa partie supérieure. On adopte un modèle dans lequel  $0 < z_m(t) < H$  délimite la partie mouillée du sol. On a  $z_m(t=0) = H$ .

À la date  $t$ , dans la zone  $0 < z < z_m(t)$ , le sol est mouillé et contient de l'eau sous forme liquide. On note  $n_{liq}$  le nombre de molécules d'eau liquide par unité de volume de sol.  $n_{liq}$  est supposé constant.

Dans la zone  $z_m(t) < z < H$ , le sol est sec mais il contient de l'eau sous forme de vapeur assimilée à un gaz parfait. On fait l'hypothèse que cette vapeur d'eau est également à la température uniforme  $T$ . La vapeur d'eau diffuse dans cette zone vers l'extérieur suivant la loi de Fick de coefficient de diffusion  $D$ . On note  $n_{vap}(z, t)$  la densité locale en molécules d'eau sous forme vapeur et  $\phi_S(z, t)$  le débit ascendant en molécules d'eau soit le nombre de molécules d'eau vapeur qui traversent une section horizontale  $S$ , orientée vers le haut et située à la côte  $z$ , par unité de temps.



1. On note  $P_{sat}(T)$  la pression de vapeur saturante de l'eau à la température  $T$ . Cette pression est la pression lorsque l'eau liquide est en équilibre avec l'eau vapeur. Justifier le fait que pour qu'il y ait évaporation et que le sol puisse sécher, il faut avoir  $P_{ext} < P_{sat}(T)$ .
2. Pourquoi un sol sèche-t-il plus vite lorsqu'il y a du vent ?
3. Rappeler la loi de Fick et préciser les unités, dans le Système International, et les noms des grandeurs qui interviennent. Exprimer  $\phi_S(z)$  en fonction de  $D$ ,  $S$  et  $\frac{dn_{vap}}{dz}$  en régime stationnaire où  $n_{vap} = n_{vap}(z)$ .
4. On étudie la diffusion de la vapeur d'eau dans le sol sec ( $z_m < z < H$ ), on suppose que le phénomène de diffusion est en régime stationnaire. On considère le système élémentaire composé de sol sec, de section  $S$  compris entre  $z$  et  $z + dz$ . Montrer que le débit  $\phi_S(z)$  est uniforme. On le notera  $\phi_S$  par la suite.
5. Pour  $z_m(t) < z < H$ , déterminer l'expression de  $n_{vap}(z)$  en fonction de  $n_{vap}(z_m)$ ,  $\phi_S$ ,  $D$ ,  $S$ ,  $z$  et  $z_m$ . Exprimer alors  $P(H)$  en fonction de  $N_a$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $P_{sat}(T)$ ,  $\phi_S$ ,  $D$ ,  $S$ ,  $H$  et  $z_m$ .
6. En considérant qu'en  $z = z_m$ , la vapeur d'eau est en équilibre thermodynamique avec l'eau liquide (soit sa pression est égale à la pression de vapeur saturante), exprimer  $n_{vap}(z_m)$  en fonction de  $N_a$ ,  $R$ ,  $T$  et  $P_{sat}(T)$ .
7. En déduire l'expression de  $n_{vap}(z)$  en fonction de  $N_a$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $P_{sat}(T)$ ,  $\phi_S$ ,  $D$ ,  $S$ ,  $z$  et  $z_m$ .
8. A l'interface sol-atmosphère, on suppose que la pression de vapeur d'eau est continue. En déduire que  $\phi_S$  s'écrit  $\phi_S = \frac{(P_{sat}(T) - P_{ext})N_a DS}{(H - z_m)RT}$ .
9. On admet que l'équation différentielle traduisant la conservation des molécules d'eau à l'interface  $z = z_m$  s'écrit  $\frac{dz_m}{dt} = -\frac{\phi_S}{S n_{liq}}$ . Vérifier que cette équation est homogène. Justifier le signe – et les variations de  $\frac{dz_m}{dt}$  en fonction de  $\phi_S$  et  $n_{liq}$ .
10. À l'aide des deux équations établies aux deux questions précédentes, en déduire l'équation différentielle vérifiée par  $z_m(t)$ , puis exprimer le temps de séchage  $\tau_{sechage}$  en fonction de  $P_{sat}(T)$ ,  $P_{ext}$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $H$ ,  $z_m$ ,  $D$  et  $N_a$ . Pour la résolution de l'équation différentielle, on utilise la méthode de séparation des variables.

## IV. Interféromètre de Michelson

Les parties A et B de ce problème sont indépendantes.

### A- Résolution interférométrique d'un doublet spectral

Les moyens spectroscopiques conventionnels (spectroscopie à prisme ou à réseau) peuvent se révéler insuffisants quand il s'agit de résoudre un doublet à très faible écart spectral. On peut alors avoir recours à des méthodes interférométriques. Il est question dans cette partie de l'utilisation de l'interféromètre de Michelson. Le schéma 1 de principe d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air est donné en annexe. On note  $Ox$  et  $Oy$  deux axes perpendiculaires définissant les directions des deux bras de l'interféromètre.  $S$  est une source lumineuse ponctuelle située sur  $Ox$ .  $M_1$  et  $M_2$  sont deux miroirs plans parfaitement réfléchissants, disposés perpendiculairement à  $Ox$  en  $H_1$  et respectivement à  $Oy$  en  $H_2$ . Le trait incliné à  $45^0$ , noté  $L_s$  schématise un groupe de deux lames à faces parallèles. Ce groupe est supposé n'introduire aucune différence de marche sur les trajets lumineux.  $L_p$  désigne une lentille mince convergente placée à la sortie de l'interféromètre de manière à ce que son axe optique soit confondu avec l'axe  $Oy$ . Un écran  $E$  est placé dans le plan focal image de  $L_p$ . On note  $C$  le foyer image de  $L_p$ .

1. Nommer les lames qui composent  $L_s$ . Qu'est-ce qui les distingue ? Expliquer la nécessité pratique d'utiliser deux lames.

2. Un rayon lumineux, noté (r), émis par S, a été représenté. Compléter le schéma 1 en annexe en faisant un tracé soigné des deux rayons ( $r_1$ ) et ( $r_2$ ) qui émergent de l'interféromètre après division de (r). On laissera apparent tout élément de construction (traits, prolongements de rayons, points remarquables , etc.) justifiant d'un tracé raisonné sans utilisation d'aucun rapporteur d'angle. Tout élément explicatif (no ms, positions des points, constructions réalisées...) sera également mentionné.

3. Sur ce même schéma positionner le miroir fictif  $M'_1$  justifiant de la dénomination "lame d'air" en faisant apparaître le point  $Q_1$  intersection de  $M'_1$  avec le prolongement fictif ad hoc de ( $r_1$ ). Enfin, terminer le tracé des rayons ( $r_1$ ) et de ( $r_2$ ) après la lentille  $L_p$  jusqu'à l'écran E (on demande comme ci-dessus un tracé raisonné).

4. Indiquer quelle est la forme des franges d'interférences observées sur l'écran (aucune justification n'est demandée). Comment nomme -t-on ces franges?

5. En appelant  $e$  l'épaisseur de la lame d'air et en prenant l'indice optique de l'air égal à 1, **exprimer la différence de marche  $\delta$  au centre C de l'écran**. Faire un schéma sur votre copie des deux rayons issus de S qui convergent en C pour appuyer votre résultat.

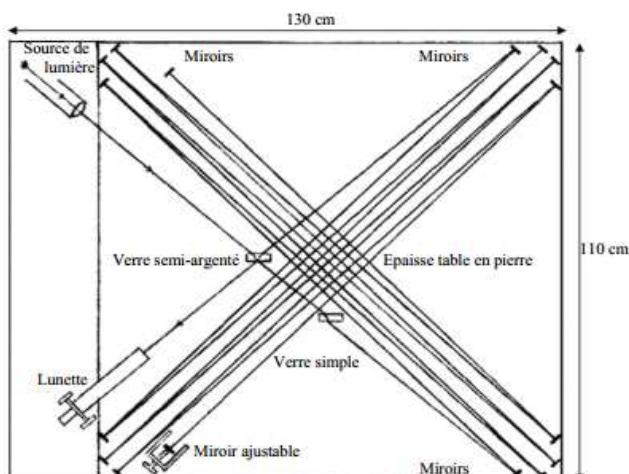
6. On étudie le cas où la source de lumière utilisée présente un doublet spectral de nombres d'ondes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  (le nombre d'onde est l'inverse de la longueur d'onde soit  $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ ). Donner l'expression des ordres d'interférence  $p_1$  et  $p_2$  en C pour chaque radiation du doublet en fonction de  $\delta$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

7. Expliquer la notion de brouillage. Pour quelles valeurs de la différence  $p_1 - p_2$  y-a-t-il brouillage en C? En pratique la totalité de la figure d'interférences est affectée et on perd la visibilité des franges partout sur l'écran. En déduire, en fonction de l'écart spectral  $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ , toutes les valeurs de  $e$  (épaisseur de la lame d'air) pour lesquelles il y a brouillage. En déduire  $D_e$ , le déplacement du miroir  $M_1$  entre deux brouillages consécutifs.

Application numérique: dans le cas du doublet  $H_\alpha$  ( écart spectral  $\Delta\sigma = 0,360 \text{ cm}^{-1}$ ), calculer la variation  $D_e$  de l'épaisseur de la lame d'air pour passer d'une situation de brouillage à la situation de brouillage directement consécutive.

8. À l'entrée de leur interféromètre historique de 1887, Michelson et Morley ont utilisé un dispositif à prismes muni d'une fente pour sélectionner la raie  $H_\alpha$  présente dans le spectre solaire. Ils ont observé des brouillages périodiques lors de la translation du miroir mobile de leur interféromètre. Partant du contact optique (bras de longueurs rigoureusement égales à  $L_0$ , ils ont compté un total de 6 brouillages à partir du contact optique pour un déplacement du miroir égal à 1/160 ième de la longueur  $L_0$  (déplacement entre ces 6 brouillages successifs). Calculer la valeur de  $L_0$  pour l'interféromètre de Michelson de 1887.

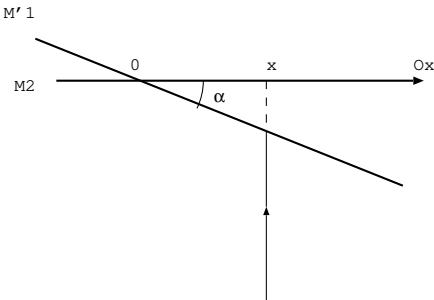
9. L'interféromètre, construit dans un sous -sol du campus de l'Université de Cleveland aux Etats-Unis, était monté sur une table en granite rectangulaire posée sur un cylindre de bois flottant dans du mercure. La table faisait environ  $130 \text{ cm} \times 110 \text{ cm}$  de cotés. La longueur  $L_0$  des bras de l'interféromètre était synthétisée grâce à deux groupes de miroirs permettant plusieurs allers -retours du faisceau sur chaque voie, comme représenté sur la figure suivante. A partir de la figure, donner, en expliquant votre calcul, une estimation grossière de la longueur d'un bras de l'interféromètre. L'ordre de grandeur obtenu est -il en accord avec la valeur  $L_0$  trouvée à la question 8.



## B- Michelson réglé en coin d'air

Dans cette question l'interféromètre de Michelson est réglé en coin d'air. On note  $M'_1$  l'image de  $M_1$  par la séparatrice et on donne le schéma du coin d'air.

- 10.** Reproduire le schéma ci-contre, et représenter les deux rayons qui interfèrent, montrer que la différence de marche s'écrit  $\delta_{2/1}(M) = 2\alpha x$  (dans l'approximation des petits angles) et en déduire l'interfrange.



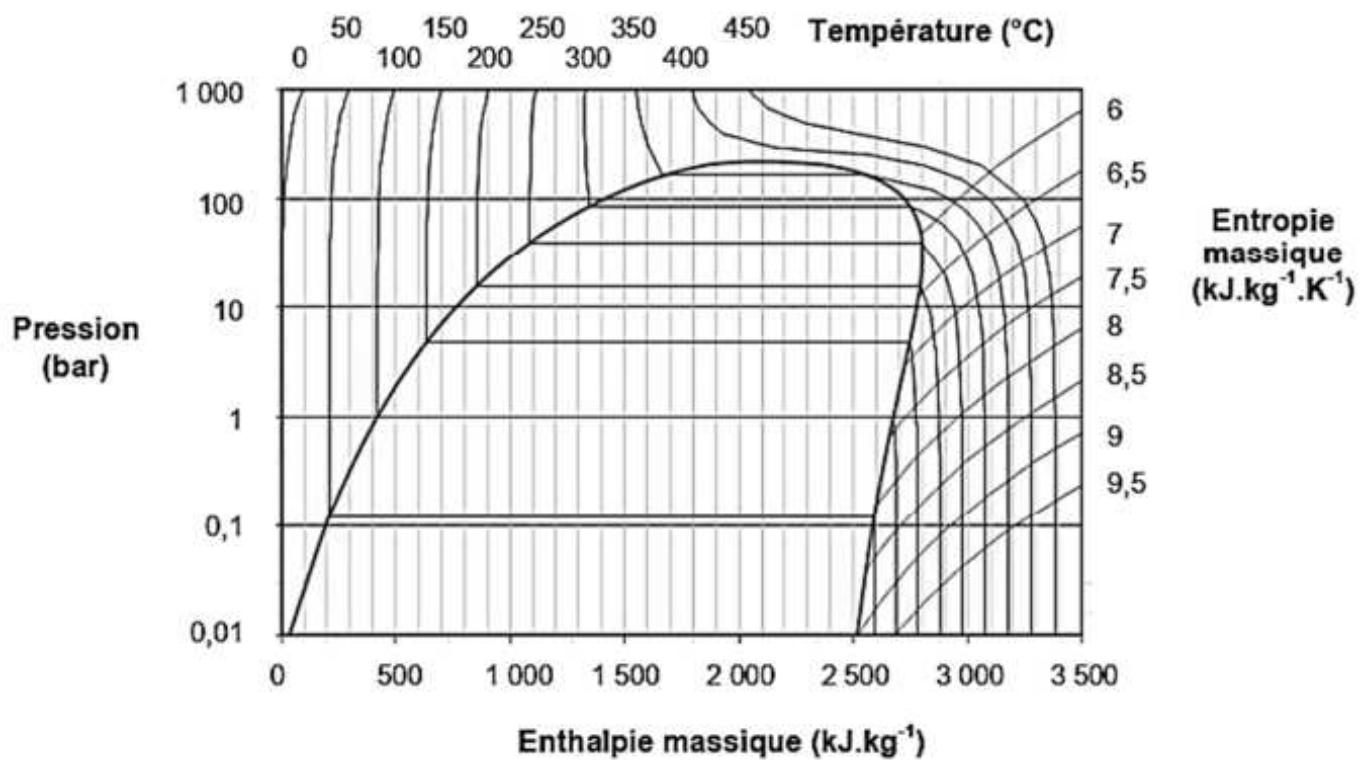
- 11.** La source est monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . On observe les franges d'interférences sur un écran à l'aide d'une lentille de focale image  $f' = 30 \text{ cm}$  placée à  $38 \text{ cm}$  du miroir  $M_2$ . On mesure sur l'écran un interfrange  $i_e = 1,3 \text{ cm}$ . Calculer la distance entre la lentille et l'écran. Calculer l'angle  $\alpha$  du coin d'air. Donnée:  $\lambda = 632 \text{ nm}$ .

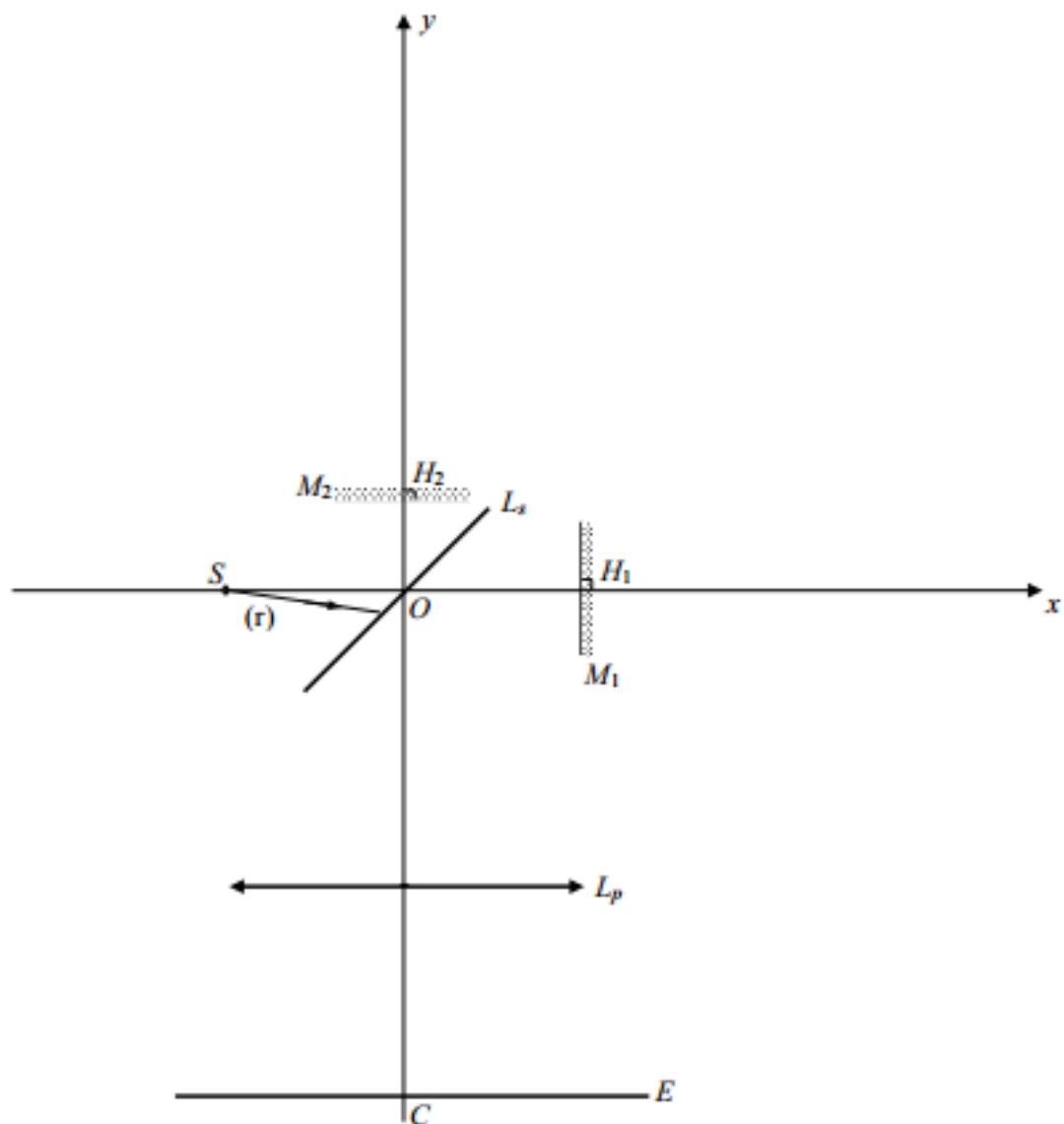
$$\text{On rappelle: } \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \text{ et } \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

- 12.** On observe les interférences en lumière blanche ( $\lambda_{min} = 450 \text{ nm}$  et  $\lambda_{max} = 750 \text{ nm}$ ). On observe le spectre en un point  $M$  de l'écran qui correspond au point d'abscisse  $x = 2,4 \text{ cm}$  sur le miroir (schéma ci-dessus). Ce spectre présente des cannelures. Expliquer le phénomène et calculer le nombre de cannelures présentes. Donnée:  $\alpha = 9,1.10^{-5} \text{ rad}$ .

NOM:

Annexe: diagramme enthalpique de l'eau



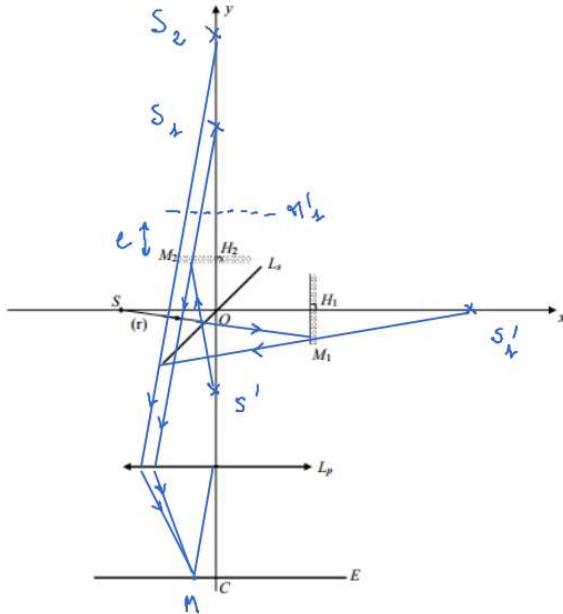


## V. Michelson

1.  $L_s$  est composé d'une lame semi-réfléchissante composée d'une lame de verre d'épaisseur  $d$  et d'indice  $n$  sur laquelle on a réalisé un dépôt métallique: c'est la lame séparatrice, et d'une lame de verre d'épaisseur  $d$  et d'indice  $n$  appelée compensatrice. La lame semi-réfléchissante introduit une différence de marche entre les rayons qui ne suivent pas le même chemin dans l'interféromètre, la lame compensatrice est là pour introduire une différence de marche qui compense celle présente à cause de la séparatrice.

2. On trace le symétrique  $S'$  de  $S$  par  $L_s$  (c'est l'image de  $S$  par le miroir de la lame semi réfléchissante), on en déduit le rayon réfléchi sur  $L_s$ . On trace le symétrique de  $S'$  par  $M_2$  et on en déduit le rayon réfléchi sur le miroir  $M_2$ .

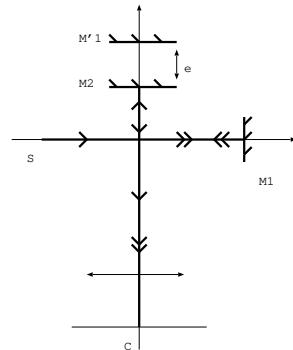
Le rayon qui traverse la lame semi-réfléchissante est réfléchi sur  $M_1$  en passant par  $S'_1$ , image de  $S$  par  $M_1$  ou encore symétrique de  $S$  par le plan de  $M_1$ . Ensuite le rayon réfléchi sur  $M_1$  se réfléchit sur la lame semi réfléchissante, on trouve ce rayon grâce à  $S_1$  image de  $S_1$  par la lame semi réfléchissante.



3. Les rayons sortent parallèles entre eux du Michelson. On trace le rayon auxiliaire parallèle à ces deux rayons et passant par le centre de la lentille (c'est le rayon que j'appelle le rayon magique). Les trois rayons parallèles entre eux convergent sur l'écran en un foyer image secondaire.

4. Les franges sont des cercles, appelés franges d'égale inclinaison. Elles sont localisées à l'infini.

5. Les rayons qui convergent en  $C$  sont ceux issus de  $S$  passant par  $Ox$ . La différence de marche entre ces deux rayons est  $\delta = 2e$ .



6. Les ordres d'interférences s'écrivent  $p_1 = \frac{\delta}{\lambda_1} = \delta\sigma_1$  et  $p_2 = \frac{\delta}{\lambda_2} = \delta\sigma_2$ .

7. Chaque longueur d'onde donne son propre système de franges et à l'écran on observe la superposition de ces deux systèmes de franges. Lorsque les franges brillantes d'un système (par exemple  $p_1$  entier) se superposent aux franges sombres de l'autre système (par exemple  $p_2$  demi entier), on observe un écran uniformément éclairé, les franges ne sont plus visibles, on dit qu'il y a brouillage.

On a donc brouillage pour  $p_1 - p_2 = k + \frac{1}{2}$  où  $k$  est un entier relatif. Ou encore  $2e_k(\sigma_1 - \sigma_2) = k + \frac{1}{2}$  soit

$$e_k = \frac{k + \frac{1}{2}}{2(\sigma_1 - \sigma_2)} = \frac{k + \frac{1}{2}}{2\Delta\sigma}.$$

On en déduit donc  $D_e = e_{k+1} - e_k = \frac{1}{2\sigma} = 1,39 \text{ cm.}$

8. Pour  $e = 0$ , c'est le contact optique. Pour  $e_1$ , on observe le premier brouillage, pour  $e_2$ , le second brouillage... et pour  $e_6$  le 6 ième brouillage. D'après l'énoncé  $e_6 - e_1 = \frac{L_0}{160}$  soit  $L_0 = 160(e_6 - e_1) = 160.5D_e = 11,1 \text{ m.}$

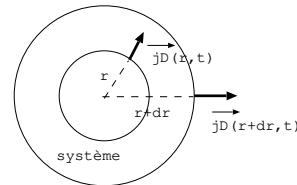
9. Un rayon lumineux entre sa transmission sur le verre semi-argenté et sa réflexion, parcourt une demi diagonale puis 7 diagonales, la longueur d'un bras du Michelson est donc 7,5 fois la diagonale de longueur approchée  $\sqrt{110^2 + 130^2} = 170 \text{ cm.}$  Donc  $L_0 = 7,5 \cdot 170 = 12,8 \text{ m:}$  c'est de l'ordre de grandeur des 11 mètres trouvés précédemment.

## VI. Diffusion de neutrons

1. La loi de Fick s'écrit  $\vec{j}_D = -D \nabla n(r, t) = -D \frac{\partial n}{\partial r} \hat{e}_r$ . Cette loi traduit que la diffusion se fait des fortes vers les faibles densités et qu'elle est d'autant plus efficace que le coefficient de diffusion est grand et que les inhomogénéités de densités sont importantes.

2.

**2.a.** Le volume compris entre les cylindres de rayons  $r$  et  $r + dr$  s'écrit  $d\tau = 2\pi r L dr$  (surface du petit cylindre fois l'épaisseur).



**2.b.** Le nombre de neutrons qui entrent dans le système est le nombre de neutrons qui traversent le cylindre de rayon  $r$  soit  $\delta N_e = j_D(r, t) 2\pi r L dt$ .

Le nombre de neutrons qui sortent du système est le nombre de neutrons qui traversent le cylindre de rayon  $r + dr$  soit  $\delta N_s = j_D(r + dr, t) 2\pi(r + dr) L dt$ .

Le nombre de neutrons dans le système à l'instant  $t$  est  $N(t) = n(r, t) 2\pi r L dr$ .

Le nombre de particules dans le système à l'instant  $t + dt$  est  $N(t + dt) = n(r, t + dt) 2\pi r L dr$ .

Le nombre de neutrons absorbés par le matériau entre  $t$  et  $t + dt$  est  $\delta N_{abs} = K 2\pi r L dr dt$ .

La conservation du nombre de neutrons s'écrit  $N(t + dt) - N(t) = \delta N_e - \delta N_s + \delta N_{abs}$ .

d'où  $n(r, t + dt) - n(r, t) 2\pi r L dr = -(j_D(r + dr, t)(r + dr) - j_D(r, t)r) 2\pi L dt - K 2\pi r L dr dt$ .

avec  $dt$  et  $dr$  petits on fait les DL:  $\frac{\partial n}{\partial t} 2\pi r L dr dt = -\frac{\partial(j_D(r, t)r)}{\partial r} 2\pi L dr dt - K 2\pi r L dr dt$ .

soit  $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(j_D(r, t)r)}{\partial r} - K$ .

**3.** En régime stationnaire  $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$  soit  $\frac{1}{r} \frac{\partial(j_D(r, t)r)}{\partial r} = -K$ .

On a donc  $\frac{\partial(j_D(r, t)r)}{\partial r} = -Kr$  soit en primitivant  $j_D(r, t)r = -\frac{Kr^2}{2} + B$  ou encore  $j_D(r, t) = -\frac{Kr}{2} + \frac{B}{r}$ .

En  $r = 0$ ,  $j_D$  diverge. Il faut donc prendre  $B = 0$  pour que  $j_D$  soit défini en tout point.

On a donc  $j_D(r) = -\frac{Kr}{2}$ .

On a  $\frac{dn}{dr} = -\frac{j_D}{D} = +\frac{Kr}{2D}$  d'après la loi de Fick.

On primitive pour trouver  $n$  soit  $n(r) = \frac{Kr^2}{4D} + C$ .

On trouve la constante  $C$  en utilisant la condition aux limites données par l'énoncé  $n(r = R_1) = n_1 = \frac{KR_1^2}{4D} + C$ .

On a donc  $n(r) = n_1 + \frac{K(r^2 - R_1^2)}{4D}$ .

4. La densité de neutrons est minimale sur l'axe du cylindre en  $r = 0$ , on a  $n_{min} = n_1 - \frac{KR_1^2}{4D}$ . Une densité est positive soit il faut  $n_1 > \frac{KR_1^2}{4D}$  ou encore  $K < \frac{4Dn_1}{R_1^2}$ .

## VII. Correction: séchage des sols

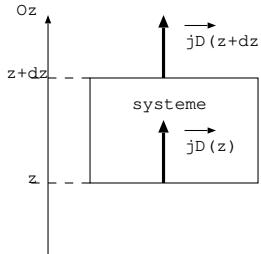
1. Il y a évaporation lorsque les molécules d'eau liquide du sol se transforment en vapeur. Cela se produit lorsque  $P_{ext}$  est inférieure à la pression de vapeur saturante. En effet, lorsque la pression en vapeur d'eau est plus faible que  $P_{sat}$ , des molécules d'eau liquide se vaporisent pour augmenter la pression de la vapeur d'eau pour atteindre la valeur de la pression à l'équilibre,  $P_{sat}(T)$ .

2. Le vent chasse les molécules d'eau vapeur qui sont à la surface du sol, ainsi il y a moins de molécules d'eau vapeur, et l'évaporation augmente pour former de nouvelles molécules d'eau vapeur pour augmenter la pression de vapeur d'eau pour qu'elle atteigne sa valeur à l'équilibre  $P_{sat}(T)$ . Ainsi le sol sèche plus vite.

3. La loi de Fick s'écrit  $\vec{j}_D = -D \vec{\text{grad}} n$  où  $\vec{j}_D$  est le vecteur densité de courant de particules en  $\text{particules.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ ,  $n$  est la densité particulaire ou le nombre de particules par unité de volume en  $\text{particules.m}^{-3}$  et  $D$  est le coefficient de diffusion en  $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ .

Le flux de particules s'écrit  $\phi_S(z) = j_D(z, t)S = -D \frac{dn_{vap}}{dz} S$  d'après la loi de Fick.

4. On considère le système élémentaire de surface  $S$  compris entre  $z$  et  $z + dz$ . En régime stationnaire, le nombre de molécules d'eau qui entrent dans ce système est égal au nombre de molécules d'eau qui en sortent entre  $t$  et  $t + dt$ . On a donc  $\phi_S(z)dt = \phi_S(z + dz)dt$  ainsi  $\phi_S$  ne dépend pas de  $z$ .



5. On a  $\phi_S = -D \frac{dn_{vap}}{dz} S = \text{constante}$  donc  $\frac{dn_{vap}}{dz} = \frac{-\phi_S}{DS}$ . On primitive:  $n_{vap}(z) = \frac{-\phi_S z}{DS} + C$ . On trouve la constante  $C$  en appliquant la condition aux limites  $n_{vap}(z_m) = \frac{-\phi_S z_m}{DS} + C$ . On en déduit  $n_{vap}(z) = \frac{-\phi_S(z - z_m)}{DS} + n_{vap}(z_m)$ .

6. On a  $P(z = z_m) = P_{sat}(T)$ . Or la vapeur d'eau est un GP donc on peut appliquer  $P(z = z_m) = P_{sat(T)} = \frac{nRT}{V}$  où  $n$  est le nombre de moles de vapeur d'eau et  $n_{vap}$  est le nombre de molécules d'eau par unité de volume on a donc  $n_{vap} = \frac{nN_a}{V}$  soit  $P(z = z_m) = P_{sat(T)} = \frac{n_{vap}(z_m)RT}{N_a}$  soit  $n_{vap}(z_m) = \frac{P_{sat}(T)N_a}{RT}$ .

7. On remplace dans l'expression de  $n_{vap}(z)$  soit  $n_{vap}(z) = \frac{-\phi_S(z - z_m)}{DS} + \frac{P_{sat}(T)N_a}{RT}$ .

On applique la loi des GP en  $z = H$  soit  $P(z = H) = \frac{n(z = H)RT}{V}$  avec  $n(z = H)$  est le nombre de moles d'eau en  $z = H$  soit comme précédemment  $n(z = H) = \frac{n_{vap}(z = H)V}{N_a}$  donc  $P(z = H) = \frac{n_{vap}(z = H)RT}{N_a}$  avec  $n_{vap}(z = H) = \frac{-\phi_S(H - z_m)}{DS} + \frac{P_{sat}(T)N_a}{RT}$ .

On obtient donc  $P(z = H) = -\frac{\phi_S(H - z_m)RT}{N_a DS} + P_{sat}(T)$ .

8. A l'interface air-sol soit en  $z = H$ , la pression de vapeur d'eau est continue soit  $P(z = H) = P_{ext} = -\frac{\phi_S(H - z_m)RT}{N_a DS} + P_{sat}(T)$ , on en déduit  $\phi_S = \frac{(P_{sat}(T) - P_{ext})N_a DS}{(H - z_m)RT}$ .

9. Le nombre de molécules d'eau qui traversent la surface  $S$  en  $z = z_m$  entre  $t$  et  $t + dt$  est égal à  $\phi_S dt$ .

Ces molécules d'eau viennent de la zone sol mouillé dans laquelle ces molécules sous forme de liquide se sont vaporisées. A l'instant  $t$ , l'interface sol mouillé-sol sec se trouve en  $z_m$  et A l'instant  $t + dt$ , l'interface sol mouillé-sol sec se trouve en  $z_m + dz_m$  (avec  $dz_m < 0$  car l'interface descend). Ainsi le volume  $-Sdz_m$  est initialement occupé par de l'eau sous forme liquide, ce volume contient  $n_{liq}(-Sdz_m)$  molécules d'eau sous forme liquide qui deviennent vapeur.

On a donc  $\phi_S dt = n_{liq}(-Sdz_m)$  d'où  $\frac{dz_m}{dt} = -\frac{\phi_S}{n_{liq}S} < 0$ : car  $z_m$  diminue au cours du temps.

De plus la diffusion est importante, plus il y a de molécules d'eau qui se vaporisent et donc le sol sèche plus rapidement soit  $z_m$  diminue plus vite ( $\phi_S$  est au numérateur).

De même plus il y a de molécules d'eau liquide dans le sol mouillé, plus ce sera long pour sécher le sol, donc  $z_m$  varie lentement quand  $n_{liq}$  est grand.

**10.** On combine les deux équations:  $\frac{dz_m}{dt} = -\frac{\phi_S}{n_{liq}S}$  et  $\phi_S = \frac{(P_{sat}(T) - P_{ext})\mathcal{N}_a D S}{(H - z_m)RT}$ . On a donc  $\frac{dz_m}{dt} = -\frac{(P_{sat}(T) - P_{ext})\mathcal{N}_a D}{(H - z_m)RT n_{liq}}$ .

Pour trouver le temps de séchage, on sépare les variables et on intègre entre  $t = 0$  où  $z_m = H$  et  $t = \tau_{sechage}$  où  $z_m = 0$ . Soit:

$$\int_H^0 (z_m - H) dz_m = \frac{(P_{sat}(T) - P_{ext})\mathcal{N}_a D}{RT n_{liq}} \int_0^{\tau_{sechage}} dt.$$

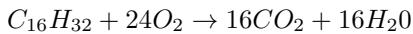
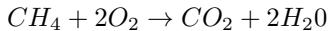
$$\text{avec } \int_0^{\tau_{sechage}} dt = \tau_{sechage}$$

$$\text{avec } \int_H^0 (z_m - H) dz_m = [\frac{z_m^2}{2} - Hz_m]_H^0 = 0 - (\frac{H^2}{2} - H^2) = \frac{H^2}{2}$$

$$\text{On obtient donc pour temps de séchage } \tau_{sechage} = \frac{RT n_{liq} H^2}{2(P_{sat}(T) - P_{ext})\mathcal{N}_a D}.$$

## VIII. Turbine à gaz

**1.** On écrit les réactions de combustion du méthane et du fuel:



Une mole de fuel, produit par sa combustion à une énergie de 7 600  $kJ$  et à un dégagement de 16 moles de  $CO_2$ .

Une mole de méthane, produit par sa combustion à une énergie de 803  $kJ$  et à un dégagement d'une mole de  $CO_2$ .

Je cherche le nombre de moles de méthane qui produit la même énergie que la combustion d'une mole de fuel. Il faut  $\frac{7600}{803} = 9,5$  moles de méthane pour produire la même énergie qu'une mole de fuel. D'après la réaction de combustion, 9,5 moles de méthane produisent 9,5 moles de  $CO_2$ , ce qui est inférieur aux 16 moles de  $CO_2$  produites par le fuel.

Ainsi la combustion du méthane produit moins de  $CO_2$  que la combustion du fuel pour une même énergie libérée.

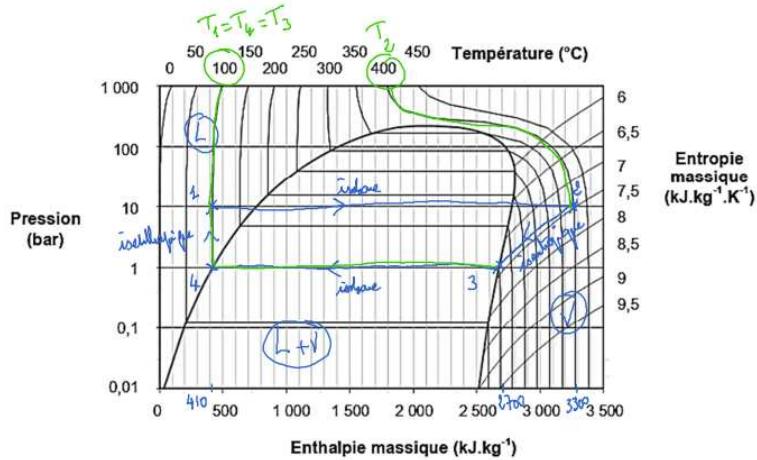
**2.** On place le point 3 sur la courbe de rosée à 1 bar et le point 4 sur la courbe d'ébullition à 1 bar.

Les points 1 et 2 sur l'isobare 10 bars.

La transformation 2-3 dans la turbine est adiabatique (pas d'entropie échangée) et réversible (pas d'entropie créée), elle est donc isentropique.

La transformation 4-1 est isenthalpique.

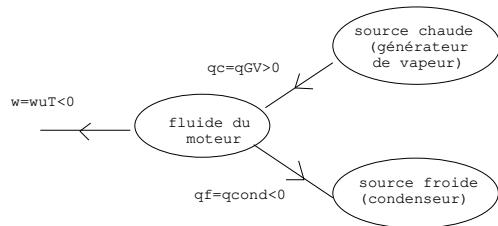
	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4
$T (^{\circ}C)$	100	410	100	100
$P (bar)$	10	10	1	1
Etat	liquide	vapeur sèche	vapeur saturante $x_v = 1$	liquide saturant $x_l = 1$
$h(kJ.kg^{-1})$	410	3300	2700	410



3. On applique le premier principe industriel dans la turbine soit pour la transformation 2-3 qui est adiabatique soit:  $h_3 - h_2 = w_{u,23} + q_{23} = w_{uT}$  soit  $w_{uT} = -600 \text{ kJ.kg}^{-1} < 0$ : le fluide donne du travail pour faire tourner la turbine.

On applique le premier principe industriel dans le générateur de vapeur, transformation 1-2, il ne comprend pas de pièce mobile donc le travail utile est nul soit:  $h_2 - h_1 = w_{u,12} + q_{12} = q_{GV}$  soit  $q_{GV} = +2890 \text{ kJ.kg}^{-1} > 0$ : le fluide reçoit du transfert thermique pour être vaporisé (contact avec la source chaude).

On applique le premier principe industriel dans le condenseur, transformation 3-4, il ne comprend pas de pièce mobile donc le travail utile est nul soit:  $h_4 - h_3 = w_{u,34} + q_{34} = q_{cond}$  soit  $q_{cond} = -2290 \text{ kJ.kg}^{-1} > 0$ : le fluide donne du transfert thermique en se condensant (contact avec la source froide).



Le rendement de ce moteur est défini par l'énergie produite sur l'énergie couteuse soit  $r = \frac{-w_{uT}}{q_{GV}} = 0,21$ .

4. La turbine a un rendement de 100 % donc la puissance mécanique qu'elle reçoit (celle qui lui donne le fluide soit  $P_{uT}$ ) et la puissance électrique de la turbine sont égales.

On a donc  $P_{elec} = D_m |w_{uT}|$  soit  $D_m = \frac{P_{elec}}{|w_{uT}|} = 0,42 \text{ kg.s}^{-1}$ .