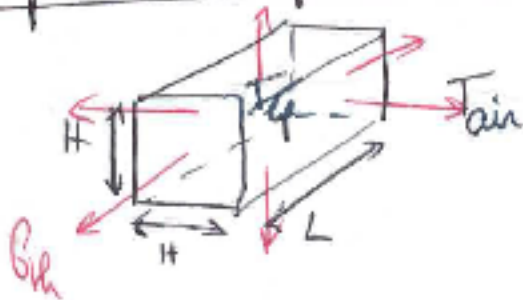


① Equilibre thermique d'une lèchie

1)



Il y a de la diffusion thermique à travers l'épaisseur de la lèchie des lèchies. On définit la résistance thermique par :

$$R_{th} = \frac{T_{eq} - T_{air}}{P_h} = \frac{e}{\lambda S} \quad \text{avec } S = 2H^2 + 4HL$$

AN: $S = 1,38 \text{ m}^2$

$R_{th1} = 1,81 \text{ KW}^{-1}$ pour $e_n = 10 \text{ cm}$

$R_{th2} = 91.10^{-2} \text{ KW}^{-1}$ pour $e_n = 0,5 \text{ cm}$

2) La résistance associée à la conduction-convexion est définie par :

$$R_{cc} = \frac{T_{eq} - T_{air}}{j_{cc} \times S} = \frac{1}{h \times S}$$

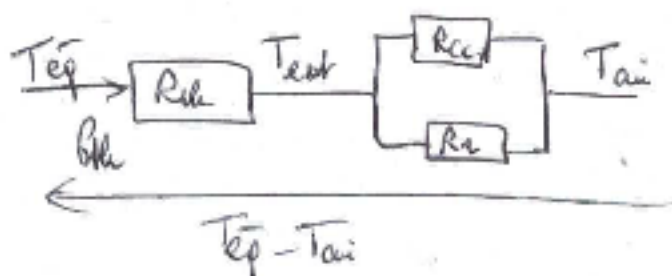
AN: $R_{cc} = 0,18 \text{ KW}^{-1}$

3) La résistance associée au rayonnement est définie par :

$$R_r = \frac{T_{eq} - T_{air}}{Q_r} = \frac{1}{K S}$$

AN: $R_r = 0,14 \text{ KW}^{-1}$

4) Schéma électrique équivalent



la résistance équivalente

$$R_{eq} = R_{th} + \frac{R_{cc} \times R_r}{R_{cc} + R_r}$$

AN: $R_{eq} = 1,88 \text{ KW}^{-1}$ pour $e_n = 10 \text{ cm}$

$R_{eq} = 0,17 \text{ KW}^{-1}$ pour $e_n = 0,5 \text{ cm}$

On en déduit la puissance thermique perdue par la lèchie :

$$P_h = \frac{T_{eq} - T_{air}}{R_{eq}}$$

AN: $P_{h1} = 15,4 \text{ W}$ pour la lèchie non lèchée

$P_{h2} = 170 \text{ W}$ pour la lèchie lèchée

En régime permanent, la température de la lèchie est constante donc la puissance thermique qu'elle perd par diffusion, rayonnement et conduction-convexion est égale à la puissance reçue de son métalalisme.

donc $P_{d1} = P_{h1}$ pour la lèchie non lèchée

$P_{d2} = P_{h2}$ pour la lèchie lèchée l'épaisseur de la lèchie pour le régime permanent

Température d'un mammifère :



la diffusion se fait des fortes vers les faibles températures $j_Q > 0$
(diffusion dans le liquide)

- 2) Puissance thermique à travers la sphère de rayon r : $P_{th}(r) = j_Q(r) \times 4\pi r^2$
On fait un bilan thermique sur le système élémentaire compris entre les sphères de rayon r et $r+dr$ dans le liquide (noté $a < r < r+dr$)



En régime stationnaire, la puissance reçue par le système est égale à la puissance perdue :

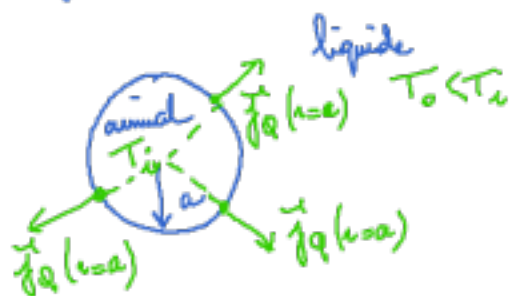
$$P_{reçue} = P_{perdue}$$

$$P_{th}(r) = P_{th}(r+dr) \Rightarrow P_{th} \text{ ne dépend pas de } r$$

$P_{th} = \text{cste}$

⚠ dans le liquide, il n'y a que de la diffusion

- 3) On fait un bilan thermique sur le système constitué de l'animal :



En régime stationnaire, la puissance reçue par l'animal est égale à la puissance perdue :

$$P_{reçue} = P_{perdue}$$

$$\rho \times \frac{4\pi a^3}{3} = P_{th}(r=a)$$

↑ puissance produite par le métabolisme

l'animal perd du transfert thermique sur sa surface en contact avec le liquide froid

$$P_{th} = \rho \times \frac{4\pi a^3}{3}$$

- 4) La loi de Fourier s'écrit :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$$

$$P_{th} = j_Q(r) 4\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = \rho \frac{4\pi a^3}{3} \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\rho a^3}{3\lambda r^2}$$

on intègre pour trouver $T(r)$: $T(r) = \frac{\rho a^3}{3\lambda r} + A$ // température dans le liquide (pointure)

C.-à-d. $T(r \rightarrow \infty) = T_0 = A$

d'où $T(r) = \frac{\rho a^3}{3\lambda r} + T_0$

5) Pour maintenir $T_c = 30^\circ\text{C}$: $T(r=a) = T_c = \frac{p a^2}{3\lambda} + T_o$

AN: $T_c = 30^\circ\text{C}$
 $T_o = 20^\circ\text{C}$

$$p = \frac{3\lambda}{a^2} (T_c - T_o)$$

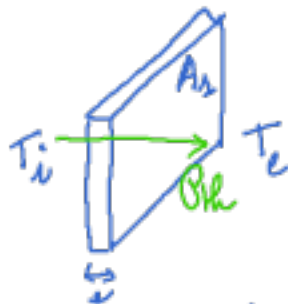
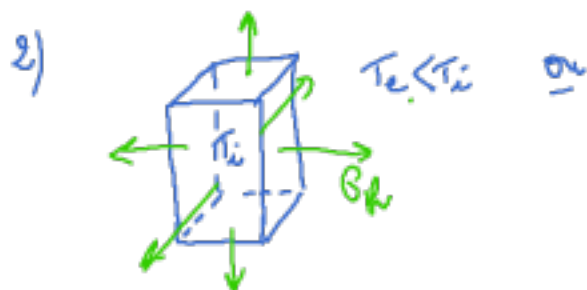
$$p_{\text{air}} = \frac{3\lambda_{\text{air}}}{a^2} (T_c - T_o) = 9,6 \text{ kW.m}^{-2}$$

$$p_{\text{eau}} = \frac{3\lambda_{\text{eau}}}{a^2} (T_c - T_o) = 960 \text{ kW.m}^{-2}$$

p : puissance produite par l'animal pour
 le maintenir à une température viable

$p_{\text{eau}} \gg p_{\text{air}}$: p_{eau} ne peut pas être produite
 donc l'animal ne peut pas survivre dans l'eau

Assemblée de manchets : Exercice III



modèle électrique : $R_{th} = \frac{e}{\lambda A_1}$



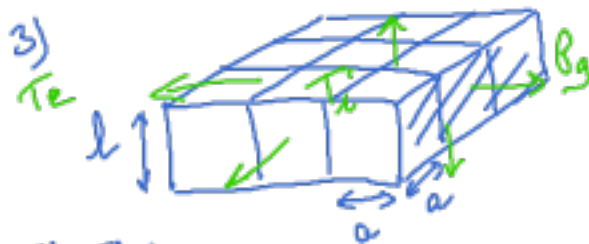
la puissance perdue par diffusion à travers les parois : $\boxed{B_{th} = \frac{T_i - T_e}{R_{th}} = \frac{\lambda A_1 (T_i - T_e)}{e}}$

En régime stationnaire, la puissance perdue par le manchot est égale à la puissance thermique reçue par le manchot : $B_{th} = B_1$

perdue par diffusion $\rightarrow$ reçue par le métalamine

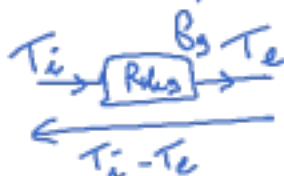
Donc $B_1 = \frac{\lambda A_1}{e} (T_i - T_e) = 50W$

AN: $\lambda = \frac{B_1 e}{A_1 (T_i - T_e)} = \dots$



$$\boxed{A_g = 9a^2 \times l + 3al \times 4 = 18a^2 + 12al}$$

modèle électrique :



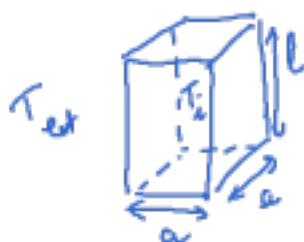
$$R_{thg} = \frac{e}{\lambda A_g}$$

$$\boxed{B_g = \frac{(T_i - T_e) \lambda A_g}{e} = B_1 \frac{A_g}{A_1}}$$

perdue par diffusion
c'est aussi la puissance
que doit fournir le
métalamine

AN: $B_{moy} = \frac{B_g}{9} = B_1 \frac{A_g}{A_1} \times \frac{1}{9} = 20W$

4) On applique le 1^{er} principe de la thermodynamique à un manchot entre t et $t+dt$:



$$dU_{\text{manchot}} = \underbrace{\rho \times a^2 l}_{\text{masse}} \times [T_i(t+dt) - T_i(t)] = \underbrace{+ B_1 dt}_{\text{énergie reçue par le métalamine}} - \underbrace{B_{th} \times dt}_{\text{énergie perdue par diffusion}}$$

avec $B_{th} = \frac{T_i - T_{etr}}{R_{th1}}$

$B_1 = 50W < 20W$: la puissance réservoir
puisque la température T_i du manchot
serait constante $\Rightarrow T_i \downarrow$

$$\rho a^2 l c \frac{dT_i}{dt} = (B_1 - \frac{T_i - T_{etr}}{R_{th1}}) dt$$

$$\frac{dT_i}{dt} + \frac{1}{R_{th} \rho a^2 l c} T_i = \frac{\theta_1 + \frac{T_{ext}}{R_{th}}}{\rho a^2 l c}$$

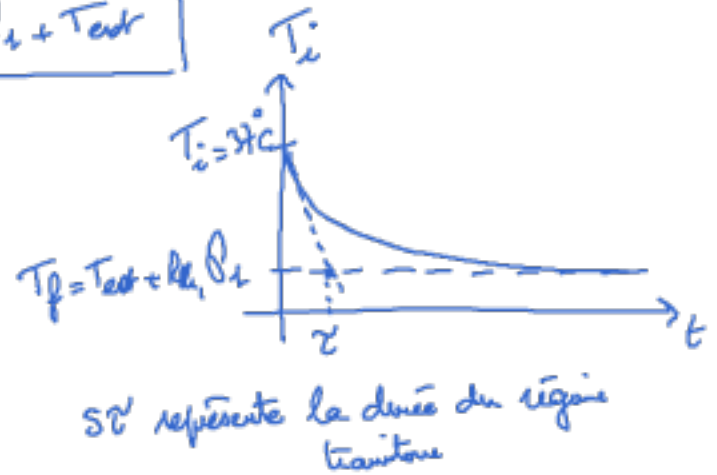
à identifier avec :

$$\frac{dT_i}{dt} + \frac{T_i}{\tau} = \frac{T_f}{\tau}$$

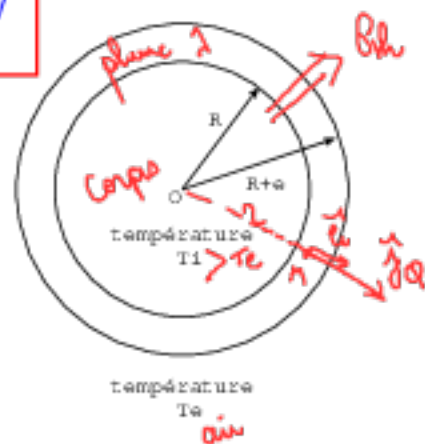
$$\boxed{\tau = R_{th} \rho a^2 l c} \quad \text{et} \quad \boxed{T_f = R_{th} \theta_1 + T_{ext}}$$

Solution : $T_i(t) = A e^{-t/\tau} + T_f$

↑
température en
régime stationnaire
pour $P_1 = 45W$



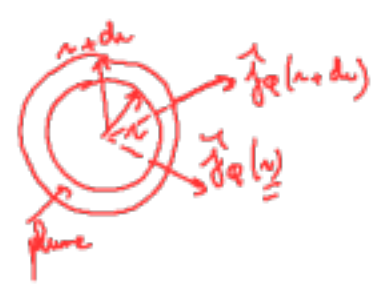
Exercice IV
chouette



$\vec{j}_q = j_q(r) \vec{e}_r$ $i.e. j_q(r) > 0$
($T_i > T_e$)

$$\Phi_{th}(r) = \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{S} \vec{m} = j_q(r) \times \underbrace{4\pi r^2}_{\text{surface de la sphère}}$$

Système élémentaire:
 $r > R$
 $r+dr < R+e$



régime stationnaire :

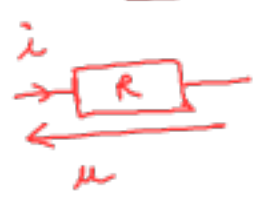
$\Phi_{perdue} = \Phi_{gagné}$
 $\Phi_{th}(r+dr) = \Phi_{th}(r) \Rightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dr} = 0$

Φ_{th} ne dépend pas de r

loi de Fourier: $\vec{j}_q = -\lambda \vec{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$

$$\boxed{\frac{d\Phi_{th}}{dr} = j_q(r) 4\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2} (*)$$

Objectif: R_{th} ?



$Q = Ri$
 i : différence de potentiels
 $i.e. i$: Q est reliée par $\Delta T = T_i - T_e$ différence de températures

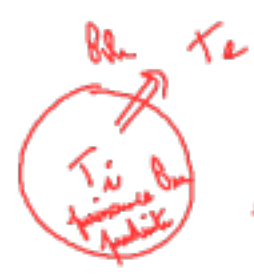
$$\boxed{R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi_{th}} = \frac{T_i - T_e}{\Phi_{th}}}$$

(*) $\Phi_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 \Rightarrow \Phi_{th} \int_R^{R+e} \frac{dr}{r^2} = -\lambda 4\pi \int_{T_i}^{T_e} dT$

$$\Phi_{th} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{R+e} = \Phi_{th} \left(-\frac{1}{R+e} - \left(-\frac{1}{R} \right) \right) = 0 \lambda 4\pi (T_e - T_i)$$

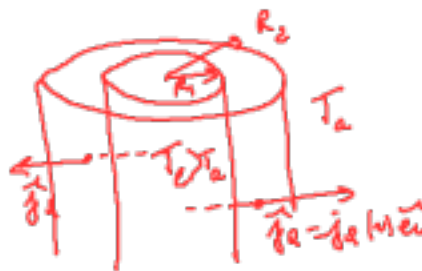
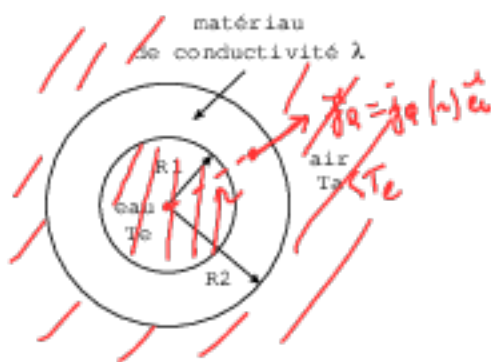
donc $\Phi_{th} \left(\frac{R - R+e}{R(R+e)} \right) = \lambda 4\pi (T_i - T_e) ||$

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_i - T_e}{\Phi_{th}} = \frac{e}{\lambda 4\pi R(R+e)}}$$



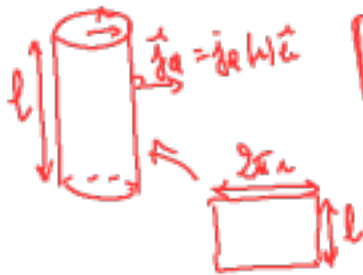
en régime stationnaire: $\Phi_{perdue} = \Phi_{gagné}$ soit $\Phi_{th} = \Phi_m = \frac{\lambda 4\pi (T_i - T_e) R(R+e)}{e}$
Système = chouette

Exercice V : canalisation d'eau



$$\frac{P_{th}}{T_c - T_a} = \frac{P_{th}}{T_c - T_a}$$

$$R_{th} = \frac{T_c - T_a}{P_{th}}$$



$$P_{th}(r) = j_q(r) \times 2\pi r l$$

Système élémentaire : $r > R_1$ et $r + dr < R_2$



régime stationnaire
 $P_{perdu} = P_{regue}$
 $P_{th}(r + dr) = P_{th}(r)$
 $\Rightarrow \frac{dP_{th}}{dr} = 0$

$$P_{th} \text{ ne dépend pas de } r$$

Loi de Fourier : $j_q = -\lambda \text{ grad } T$ or $j_q = -\lambda \frac{dT}{dr}$

$$\text{d'où } P_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 2\pi r l$$

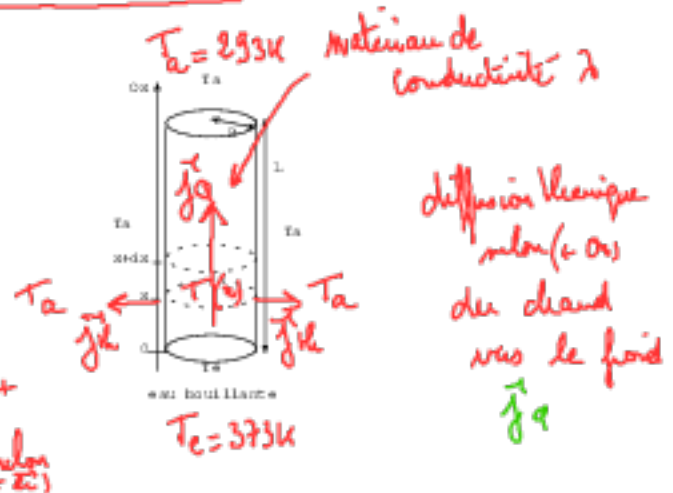
$$\text{soit } P_{th} \int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{dr}{r} = -\lambda 2\pi l \int_{T(R_1)=T_c}^{T(R_2)=T_a} dT \quad \Rightarrow \quad P_{th} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = -\lambda 2\pi l (T_a - T_c) = \lambda 2\pi l (T_c - T_a)$$

$$R_{th} = \frac{T_c - T_a}{P_{th}} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi l \lambda}$$

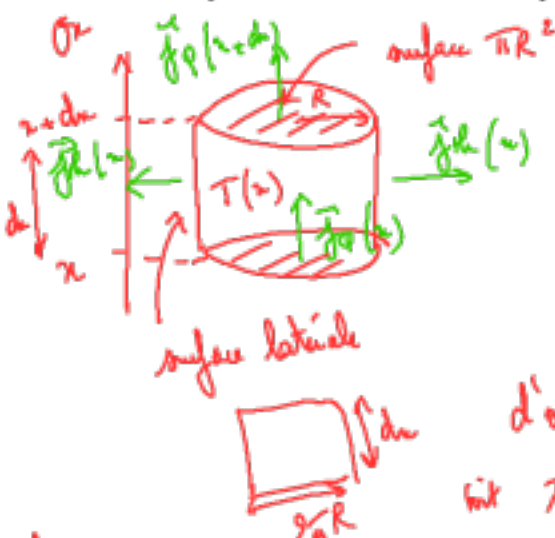
λ petit, matériau isolant, R_{th} grande

I. Détermination de la conductivité thermique d'un matériau

On considère une tige métallique de conductivité thermique λ , de longueur L et de rayon R . Cette tige est placée à une de ses extrémités dans un récipient contenant de l'eau en ébullition à la température $T_e = 373 \text{ K}$. Le reste de la tige est en contact avec l'atmosphère de température $T_a = 293 \text{ K}$. Soit h le coefficient de transfert convecto-diffusif. On rappelle la loi de Newton : $j_{th} = h(T(x) - T_a)$, où j_{th} est le vecteur densité de flux thermique lié à la diffusion et à la convection, et sortant de la tige à l'abscisse x en régime stationnaire et $T(x)$ la température de la tige à l'abscisse x .



- Effectuer un bilan d'énergie au système élémentaire compris entre les abscisses x et $x+dx$ pour déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$.



1^{re} princ de la thermo appliqué au système (entre t et t+dt)

$$dU = + \delta Q_{\text{reçu}} - \delta Q_{\text{perdu}}$$

car la T est cette

$$\text{ici } \delta Q_{\text{reçu}} = j_q(x) \times \pi R^2 \times dt$$

$$\text{ici } \delta Q_{\text{perdu}} = j_q(x+dx) \pi R^2 dt + j_{th}(x) 2\pi R dx dt$$

$$\text{d'où } j_q(x) \pi R^2 = j_q(x+dx) \pi R^2 + j_{th}(x) 2\pi R dx$$

$$\text{soit } \pi R^2 (j_q(x+dx) - j_q(x)) + h(T(x) - T_a) 2\pi R dx = 0$$

$$\text{loi de Fourier : } j_q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\frac{dj_q}{dx} \times dx = -\lambda \frac{dT}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R} T = -\frac{2h}{\lambda R} T_a}$$

- En déduire $T(x)$ pour une tige très longue (L très grand): $T(x) = T_a + (T_e - T_a)e^{-x/\delta}$. Exprimer δ .

$$\text{soit à résoudre : } \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R} T = -\frac{2h}{\lambda R} T_a$$

$$\text{solution particulière : } \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T = T_a$$

$$\text{solution générale : } \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R} T = 0 \quad \text{Éq. caractéristique : } r^2 - \frac{2h}{\lambda R} = 0$$

$$r^2 = \frac{2h}{\lambda R} \quad r_1 = +\sqrt{\frac{2h}{\lambda R}} \quad \text{et} \quad r_2 = -\sqrt{\frac{2h}{\lambda R}}$$

$$T(x) = T_a + A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x} = T_a + A e^{\sqrt{\frac{2h}{\lambda R}} x} + B e^{-\sqrt{\frac{2h}{\lambda R}} x}$$

$$\text{C.L : } T(x=0) = T_e = T_a + A + B \quad \text{à l'extrémité} \quad \Rightarrow B = T_e - T_a$$

$$T(x=L) = T_a = T_a + A e^{\sqrt{\frac{2h}{\lambda R}} L} + B e^{-\sqrt{\frac{2h}{\lambda R}} L} \Rightarrow A = 0$$

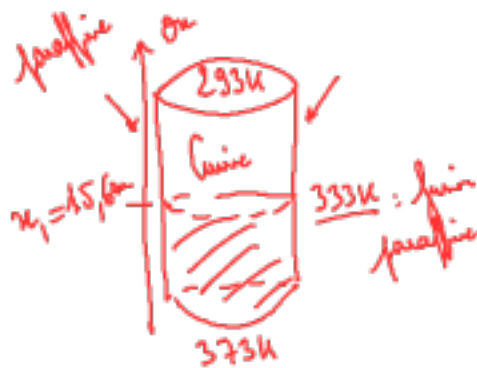
3. On compare dans les conditions précédentes deux tiges de dimensions identiques l'une constituée de cuivre de conductivité thermique $\lambda_{Cu} = 390 \text{ SI}$ et l'autre en étain de conductivité thermique λ_{Sn} inconnue. Chaque tige est recouverte de paraffine dont la température de fusion est 333 K . On observe sur chaque tige la fusion en $x_1 = 15,6 \text{ cm}$ pour le cuivre et $x_2 = 6,4 \text{ cm}$ pour l'étain. En déduire λ_{Sn} .

$$T(x) = T_a + (T_e - T_a) e^{-\sqrt{\frac{2h}{\lambda R}} x}$$

$$T(x) = T_a + (T_e - T_a) e^{-x/\delta}$$

$$\text{ou pour } \delta = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}$$

distanc
pour $x > 5\delta$: $T(x) \approx T_a$



$$T(x_1) = T_{\text{fin}} = T_a + (T_e - T_a) e^{-x_1/\delta_1}$$

$$\frac{T_{\text{fin}} - T_a}{T_e - T_a} = e^{-x_1/\delta_1}$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{Cu} R}{2h}}$$

$$\frac{x_1}{\delta_1} = -\ln\left(\frac{T_{\text{fin}} - T_a}{T_e - T_a}\right)$$

on a la même chose pour l'étain :

$$\frac{x_2}{\delta_2} = -\ln\left(\frac{T_{\text{fin}} - T_a}{T_e - T_a}\right)$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{Sn} R}{2h}}$$

x_1, x_2 et λ_{Cu} sont connus, je cherche λ_{Sn} :

$$\frac{x_1}{\delta_1} = \frac{x_2}{\delta_2} \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}} = \frac{x_2}{\sqrt{\lambda_{Sn}}}$$

$$\sqrt{\lambda_{Sn}} = \frac{x_2}{x_1} \sqrt{\lambda_{Cu}} \Rightarrow \lambda_{Sn} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \lambda_{Cu}$$