

# DM 4 de physique

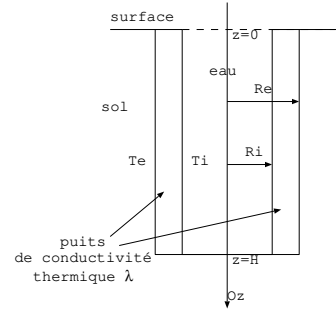
## I. Chauffage d'une pièce

On souhaite maintenir constante la température d'une pièce à  $T_i = 20^0C$ . La résistance thermique des 4 murs et du sol est  $R_1 = 10.10^{-3} K.W^{-1}$ . La résistance thermique du plafond et des tuiles est  $R_2 = 2.10^{-3} K.W^{-1}$ . La température de l'extérieur (sol et air) est  $T_e = 10^0C$ . On se place en régime stationnaire.

1. Calculer la puissance thermique  $P$  à apporter à la pièce pour maintenir constante la température.
2. On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique  $R'_2$  de ce matériau afin de réaliser une économie de 50 % sur la puissance thermique  $P$ .

## II. Conduction de la chaleur dans un puits

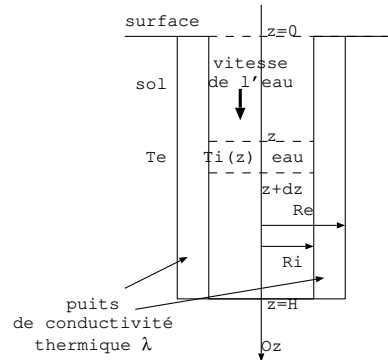
Un puits d'alimentation en eau est modélisé par un cylindre de révolution vertical, de rayon intérieur  $R_i$  et de rayon extérieur  $R_e$ , homogène et de conductivité thermique  $\lambda$ . On repère la profondeur à partir de la surface à l'aide d'un axe vertical  $Oz$  orienté vers le bas. A l'intérieur du puits se trouve de l'eau à la température  $T_i$  et à l'extérieur se trouve le sol de température  $T_e$ .



On suppose pour l'instant que toute la surface intérieure du puits est maintenue à la température  $T(r = R_i) = T_i$  et que la surface extérieure est maintenue à la température  $T(r = R_e) = T_e$  (uniforme également). Les extrémités du tube ( $z = 0$  et  $z = H$ ) sont parfaitement isolées thermiquement:  $T$  ne dépend que de la distance  $r$  à l'axe  $Oz$  et on note  $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$  le vecteur densité de courant thermique. On note  $\phi(r)$  le flux thermique sortant du cylindre de hauteur  $H$  et de rayon  $r$ .

1. Justifier qu'en régime stationnaire, le flux thermique  $\phi$  est le même à travers tout cylindre de hauteur  $H$ , d'axe  $Oz$  et de rayon  $r$  tel que  $R_i < r < R_e$ .
2. Déterminer la résistance thermique  $R_{th}$  de cette conduite en fonction de  $R_i$ ,  $R_e$ ,  $H$  et  $\lambda$ .
3. En déduire l'expression de la température  $T(r)$  à l'intérieur du tube, pour  $r$  tel que  $R_i < r < R_e$  uniquement en fonction de  $T_i$ ,  $T_e$ ,  $R_i$ ,  $R_e$  et  $r$ .

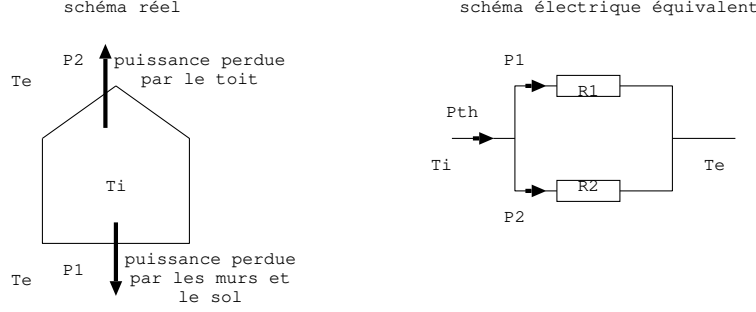
En réalité la température de l'eau dans le puits dépend de la profondeur  $z$ . On note  $T_i(z)$ , la température de l'eau à la profondeur  $z$ . La température du sol est toujours  $T_e$  et est homogène. La température de la paroi du puits ne dépend que de  $z$  et de la distance  $r$  à l'axe de symétrie  $Oz$  du puits, on note  $T(r, z)$ . On se place en régime stationnaire. On considère que le transfert thermique ne se fait que radialement (on néglige les transferts thermiques par conduction dans la direction  $Oz$ ). L'eau chaude descend (sens  $z$  décroissant) dans le puits. On note  $c$  la capacité thermique massique de l'eau,  $\rho$  sa masse volumique, et  $D_m$  son débit massique.



4. Appliquer le premier principe industriel à la tranche d'eau comprise entre les hauteurs  $z$  et  $z + dz$ . En déduire la puissance thermique perdue par l'eau en fonction de  $D_m$ ,  $c$ ,  $dz$  et  $\frac{dT_i}{dz}$ .
5. Exprimer, en utilisant la résistance thermique et les résultats de la question 2, la puissance thermique perdue par l'eau en fonction de  $T_i(z)$ ,  $T_e$ ,  $\lambda$ ,  $dz$ ,  $R_e$  et  $R_i$ .
6. Déduire des deux questions précédentes que  $T_i(z)$  vérifie une équation différentielle de la forme  $\frac{dT_i}{dz} + \frac{T_i}{\delta} = \frac{T_e}{\delta}$ . Exprimer  $\delta$  en fonction de  $\lambda$ ,  $D_m$ ,  $c$ ,  $R_e$  et  $R_i$ .
7. Exprimer  $T_i(z)$  pour  $T_i(z = 0) = T_0$ .

### III. Correction: chauffage d'une pièce

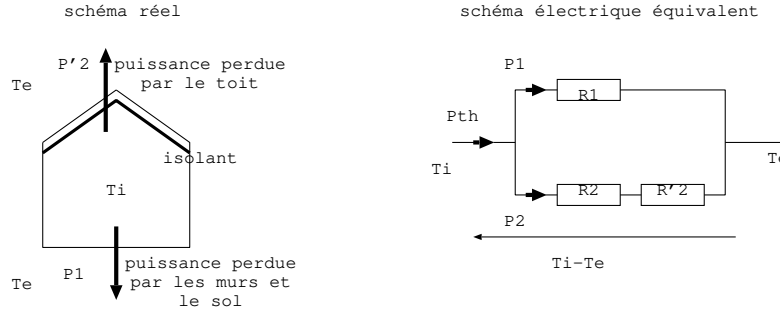
1. Les résistances données dans l'énoncé sont soumises à la même différence de température  $T_i - T_e$  (soit dans l'analogie électrique, sont soumises à la même tension). Elles sont donc parcourues par des flux différents (soit dans l'analogie électrique, sont parcourues par des courants différents). Elles sont donc en parallèle.



La puissance thermique perdue par la pièce est donc  $P_{th} = \frac{T_i - T_e}{R_{eq}}$  avec  $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ . AN:  $P_{th} = 6 \text{ kW}$ .

La pièce perd le transfert thermique  $P_{th}$  et reçoit la puissance thermique  $P$  du chauffage. En régime stationnaire, la puissance perdue est égale à la puissance reçue donc  $P = P_{th} = 6 \text{ kW}$ .

2.



La puissance thermique perdue par la pièce est donc  $P_{th} = (T_i - T_e) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R'_2} \right) = 0,5 P_{th} = 0,5 (T_i - T_e) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ .

On a donc  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R'_2} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2}$  soit après calcul  $R'_2 = \frac{1}{\frac{1}{2R_2} - \frac{1}{2R_1}} - R_2 = 3.10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$ .

### IV. Correction: banque G2E 2020

1. On considère le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons  $r$  et  $r + dr$  avec  $r > R_i$  et  $r + dr < R_e$  et de hauteur  $H$ . Ce système a pour volume  $d\tau = 2\pi r H dr$ .

En régime stationnaire, la puissance thermique reçue par ce système (soit  $\phi(r)$ ) est égale à la puissance perdue par le système (soit  $\phi(r + dr)$ ) on a donc  $\phi(r) = \phi(r + dr)$  donc  $\phi$  ne dépend pas de  $r$ .

2. On a donc  $\phi = \vec{j} \cdot S \vec{n}_{sortant} = j(r) \vec{e}_r 2\pi r H \vec{e}_r = j(r) 2\pi r H$ .

On exprime le vecteur densité de courant thermique avec la loi de Fourier soit  $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$  et  $j(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}$ .

On remplace dans l'expression du flux:  $\phi = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H$ . On sépare les variables  $T$  et  $r$  soit  $\phi \frac{dr}{r} = -\lambda 2\pi H dT$ , et on intègre en utilisant les conditions aux limites  $T(r = R_i) = T_i$  et  $T(r = R_e) = T_e$  soit  $\phi \int_{R_i}^{R_e} \frac{dr}{r} = -\lambda 2\pi H \int_{T_i}^{T_e} dT$ .

On a donc  $\phi \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right) = -\lambda 2\pi H (T_e - T_i)$ .

On en déduit l'expression de la résistance thermique définie par  $R_{th} = \frac{T_i - T_e}{\phi} = \frac{\ln(\frac{R_e}{R_i})}{\lambda 2\pi H}$ .

3. On pourrait aussi intégrer l'équation précédente entre  $r = R_i$  et  $r$  soit entre  $T(r = R_i) = T_i$  et  $T(r)$ :  
 $\phi \int_{R_i}^r \frac{dr}{r} = -\lambda 2\pi H \int_{T_i}^{T(r)} dT$  qui donne  $\phi \ln(\frac{r}{R_i}) = -\lambda 2\pi H (T(r) - T_i)$  donc  $T(r) = T_i - \frac{\phi \ln(\frac{r}{R_i})}{\lambda 2\pi H}$ .

On remplace  $\phi$  par l'expression de la question précédente:  $\phi \ln(\frac{R_e}{R_i}) = -\lambda 2\pi H (T_e - T_i)$  soit  $\phi = \frac{-\lambda 2\pi H (T_e - T_i)}{\ln(\frac{R_e}{R_i})}$ .

On obtient donc  $T(r) = T_i - \frac{\phi \ln(\frac{r}{R_i})}{\lambda 2\pi H} = T_i + \frac{\ln(\frac{r}{R_i})}{\ln(\frac{R_e}{R_i})} (T_e - T_i)$ .

4. On écrit le premier principe industriel:  $D_m(h(z + dz) - h(z)) = P_u + P_{th}$  avec  $P_u = 0$  en absence de pièces mobiles et  $P_{th} = -\frac{T_i - T_e}{R_{th}}$  (si  $T_i > T_e$  l'eau perd du transfert thermique d'où le signe -). D'après

la question 2, la résistance thermique d'une hauteur  $H$  de conduite est  $R_{th} = \frac{\ln(\frac{R_e}{R_i})}{\lambda 2\pi H}$  et donc la résistance thermique d'une hauteur  $dz$  de conduite est  $R_{th} = \frac{\ln(\frac{R_e}{R_i})}{\lambda 2\pi dz}$ .

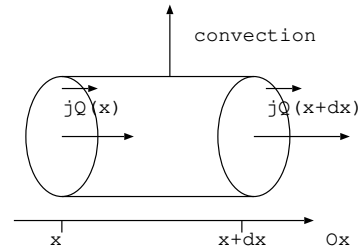
On a donc  $D_m(h(z + dz) - h(z)) = D_m c (T_i(z + dz) - T_i(z)) = D_m c \frac{dT_i}{dz} dz = -\frac{(T_i - T_e) \lambda 2\pi dz}{\ln(\frac{R_e}{R_i})}$ .

D'où l'équation différentielle à résoudre:  $\frac{dT_i}{dz} + \frac{\lambda 2\pi}{D_m c \ln(\frac{R_e}{R_i})} T_i = + \frac{\lambda 2\pi}{D_m c \ln(\frac{R_e}{R_i})} T_e$ .

5. On pose  $\delta = \frac{D_m c \ln(\frac{R_e}{R_i})}{\lambda 2\pi}$ , la solution est  $T_i(z) = T_e + A e^{-z/\delta}$ . On trouve  $A$  avec la condition aux limites  $T_i(z = 0) = T_0 = T_e + A$ .

## V. extrait de CCINP PC 2022

Q23- Soit le système de section  $S = \pi(d/2)^2$  compris entre  $x$  et  $x + dx$ . L'énoncé demande d'exprimer le transfert thermique reçu par conduction (ou diffusion), il faut comprendre ici qu'il faut compter tous les transferts thermiques par conduction à savoir le transfert vraiment reçu  $j_Q(x) S dt$  et le transfert perdue  $j_Q(x + dx) S dt$  on a donc  $\delta Q_{cond} = +j_Q(x) S dt - j_Q(x + dx) S dt = -\frac{dj_Q}{dx} S dt dx = \lambda_f \frac{d^2 T_f}{dx^2} \frac{\pi d^2}{4} dx dt$  en appliquant la loi de Fourier  $j_Q = -\lambda_f \frac{dT_f}{dx}$ .



Q24- Le travail électrique est la travail lié à la puissance électrique dans la résistance  $P_e = UI = dRI^2$  donc  $\delta W_e = dRI^2 dt$ .

Q25- On applique le premier principe de la thermo au système élémentaire entre  $t$  et  $t + dt$  soit:  $dU = \delta Q_{cond} - \delta Q_{conv} + \delta W_e = \lambda_f \frac{d^2 T_f}{dx^2} \frac{\pi d^2}{4} dx dt - h(T_f - T_0) 2\pi(d/2) dx dt + dRI^2 = 0$  en régime stationnaire.

Ainsi on a après simplification par  $dx dt$ :  $\lambda_f \frac{d^2 T_f}{dx^2} \frac{\pi d^2}{4} - h(T_f - T_0) \pi d + \frac{R_0}{l} (1 + \gamma(T_f - T_0)) I^2 = 0$

soit l'équation différentielle:  $\frac{d^2 T_f}{dx^2} + (\frac{R_0 I^2 4 \gamma}{l \pi d^2 \lambda_f} - \frac{h 4}{\lambda_f d}) (T_f - T_0) = -\frac{R_0 I^2 4}{l \pi d^2 \lambda_f}$ .

Par identification avec  $\frac{d^2 \theta_f}{dx^2} - K_1 \theta_f = K_2$ , on a  $K_1 = -\frac{R_0 I^2 4 \gamma}{l \pi d^2 \lambda_f} + \frac{h 4}{\lambda_f d}$  et  $K_2 = -\frac{R_0 I^2 4}{\pi d^2 l \lambda_f}$ .

Q26- On résout l'équation différentielle  $\frac{d^2 \theta_f}{dx^2} - K_1 \theta_f = K_2$ .

La solution particulière est  $\theta_f = -\frac{K_2}{K_1} = -K_2 l_r^2$ .

Pour la solution générale, on écrit l'équation caractéristique  $r^2 - \frac{1}{l_r^2} = 0$  soit  $r = \pm \frac{1}{l_r}$ . La solution générale

est donc de la forme  $\theta_f = Ae^{-x/l_r} + Be^{+x/l_r}$ .

On a donc  $\theta_f = -K_2 l_r^2 + Ae^{-x/l_r} + Be^{+x/l_r}$ .

On trouve les constantes  $A$  et  $B$  avec le conditions aux limites:

$$\theta_f(x = -l/2) = 0 = -K_2 l_r^2 + Ae^{l/2l_r} + Be^{-l/2l_r} \text{ car } T_f(x = -l/2) = T_0 \text{ et } \theta_f = T_f - T_0.$$

$$\theta_f(x = +l/2) = 0 = -K_2 l_r^2 + Ae^{-l/2l_r} + Be^{+l/2l_r} \text{ car } T_f(x = +l/2) = T_0 \text{ et } \theta_f = T_f - T_0.$$

On fait la somme des équations:  $(A + B)(e^{l/2l_r} + e^{-l/2l_r}) = 2K_2 l_r^2$  soit  $(A + B) \cosh(\frac{l}{2l_r}) = 2K_2 l_r^2$ .

On fait la différence des équations:  $(A - B)(e^{l/2l_r} - e^{-l/2l_r}) = 0$  soit  $A = B = \frac{K_2 l_r^2}{2 \cosh(\frac{l}{2l_r})}$ .

On a donc la solution  $\theta_f = -K_2 l_r^2 + \frac{K_2 l_r^2}{2 \cosh(\frac{l}{2l_r})}(e^{-x/l_r} + e^{+x/l_r}) = -K_2 l_r^2 + \frac{K_2 l_r^2 2 \cosh(\frac{x}{2l_r})}{2 \cosh(\frac{l}{2l_r})} = \theta_0(1 - \frac{\cosh(\frac{x}{2l_r})}{\cosh(\frac{l}{2l_r})})$  avec  $\theta_0 = -K_2 l_r^2$ .

Q27- D'après la figure 7, il vaut mieux choisir  $l_r$  pour avoir une température uniforme.  $l_r$  représente la distance des variations spatiales, et doit donc être choisie la plus faible possible.