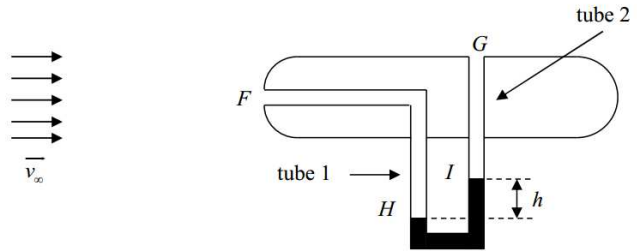


TD dynamique des fluides parfaits

I. Instrumentation (CCINP PC 2020)

Le tube de Pitot est un des nombreux capteurs qui équipent l'avion. Il permet la mesure de la vitesse de l'avion.

Il s'agit d'un tube très fin (moins de 5 mm^2 de surface) qui est placé parallèlement à la direction de l'écoulement de l'air. Ce tube possède deux ouvertures en F et G. L'ouverture en F est la prise dite de pression totale et celle en G est la prise dite de pression statique. On mesure la différence de pression de l'air entre les deux tubes 1 et 2 avec un manomètre différentiel, ce qui permet d'obtenir la vitesse v_∞ de l'écoulement



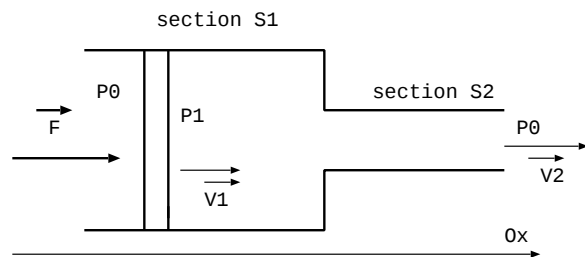
On considère que l'air est un fluide parfait, homogène, incompressible, de masse volumique ρ_∞ et en écoulement stationnaire. On rappelle que les effets de la gravité sur l'air sont négligés. Loin du tube l'air a une pression P_∞ et une vitesse v_∞ .

1. Représenter l'allure de la ligne de courant qui aboutit en F et l'allure de la ligne de courant qui longe le tube et passe à proximité de G.
2. Déterminer, en fonction de P_∞ , v_∞ et ρ_∞ les expressions de la vitesse v_F et de la pression P_F du fluide en F ainsi que la vitesse v_G et la pression P_G du fluide en G.
3. Dans le manomètre, il y a un liquide de masse volumique ρ_l . On mesure une différence d'altitude h entre les deux surfaces du liquide. Déterminer l'expression de la différence de pression, $P_H - P_I$, entre ces deux surfaces.
4. Dédurre des questions précédentes l'expression de la vitesse de l'écoulement v_∞ de l'air en fonction de ρ_∞ , ρ_l , g et h . Comment évolue h lorsque la vitesse de l'air augmente?

Réponses: 2- $P_F = P_\infty + \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2}$ 4- $v_\infty = \sqrt{\frac{2\rho_l g h}{\rho_\infty}}$

II. Débit d'une seringue

Dans la seringue, le piston se déplace sans frottement dans un cylindre de section S_1 et de diamètre $d_1 = 4 \text{ cm}$ rempli d'un liquide supposé parfait de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$. Le piston est poussé par une force $F = 62 \text{ N}$ à une vitesse v_1 constante. Le fluide peut s'échapper vers l'extérieur par un cylindre de section S_2 et de diamètre $d_2 = 1 \text{ cm}$ à une vitesse v_2 . On note $P_0 = 1 \text{ bar}$ la pression atmosphérique.



Dédurre de la RFD appliquée au piston et de l'application de la relation de Bernoulli (on suppose que toutes les hypothèses sont vérifiées sauf celle d'un écoulement irrotationnel), l'expression du débit volumique du fluide dans la seringue. Faire l'AN.

Réponse: $D_v = \sqrt{\frac{2FS_1S_2^2}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$

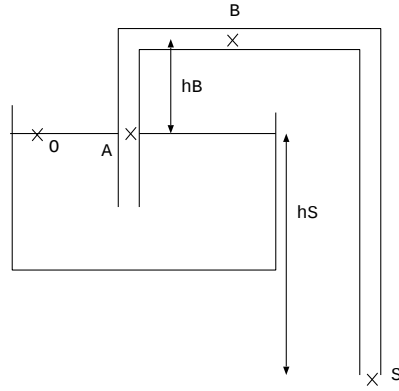
III. Siphon

Le dispositif est composé d'un réservoir rempli d'eau de masse volumique ρ . Le niveau d'eau est maintenu constant grâce à une alimentation. La conduite de vidange a une section S . On néglige la viscosité de l'eau. On suppose que toutes les hypothèses sont vérifiées pour appliquer la relation de Bernoulli sauf celle d'un écoulement irrotationnel.

1. Exprimer la vitesse du fluide en S en fonction de g et h_s , en déduire l'expression du débit volumique D_v .

2. Exprimer la pression en B en fonction de P_0 , ρ , g , h_B , S et le débit volumique D_v dans le siphon. Justifier que B est le point où la pression est minimale dans le siphon.

3. Lorsque la pression en B atteint la pression de vapeur saturante de l'eau notée P_{sat} , il apparaît de bulles d'eau vapeur: c'est le phénomène de cavitation. Déterminer le débit maximal D_v que l'on peut obtenir sans que le phénomène de cavitation ne se produise. Donnée: $P_{sat} \approx 0$.



Réponses: 1- $D_v = \sqrt{2gh_s}S$ 2- $P_B = P_0 - \rho gh_B - \frac{\rho D_v^2}{2S^2}$ 3- $D_v < S \sqrt{\frac{2(P_0 - \rho gh_B)}{\rho}}$

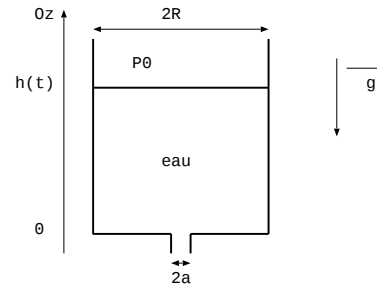
IV. Vidange d'un réservoir

Considérons un récipient cylindrique d'axe de révolution vertical Oz de rayon $R = 10 \text{ cm}$ rempli d'eau sur une hauteur initiale h_0 . Son fond est percé d'une ouverture circulaire d'un rayon $a = 1 \text{ cm}$. Au cours du temps le récipient se vide, on note $h(t)$ la hauteur d'eau dans le récipient. On suppose que le récipient se vide très lentement, on se place donc en régime quasi-stationnaire. On néglige la viscosité de l'eau.

1. Tracer l'allure de quelques lignes de courant dans le réservoir. On note A un point à la surface de l'eau dans le réservoir et B le point dans le trou du réservoir sur la ligne de courant passant par A .

2. Déduire de la conservation du débit volumique et de la relation de Bernoulli, l'expression de la vitesse de l'eau en A . Que devient cette expression lorsque $a \ll R$?

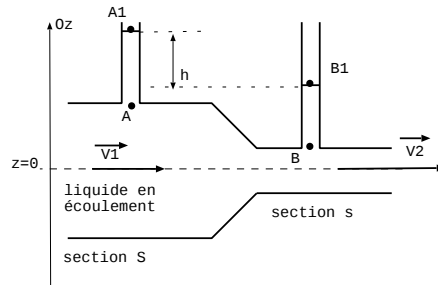
3. Donner la relation simple qu'il y a entre v_A et $\frac{dh}{dt}$. Exprimer le temps τ de vidange de ce réservoir.



Réponse : $v_A = \frac{a^2}{R^2} \sqrt{2gh}$ et $\tau = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \sqrt{\frac{R^4}{a^4} - 1}$

V. Tube de Venturi utilisé en débitmètre

Soit un liquide parfait de masse volumique ρ_l en écoulement dans une conduite de section variable (S en amont et s en aval) percée de deux cheminées latérales. On cherche à exprimer le débit volumique D_v en fonction de g , h , S et s .



1. Expliquer la différence de niveaux d'eau dans les deux cheminées.

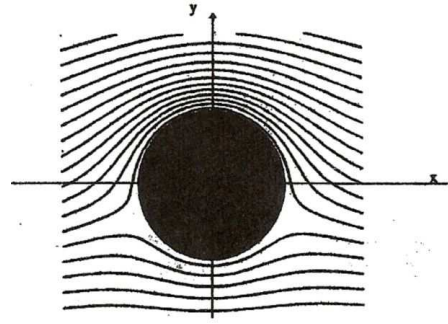
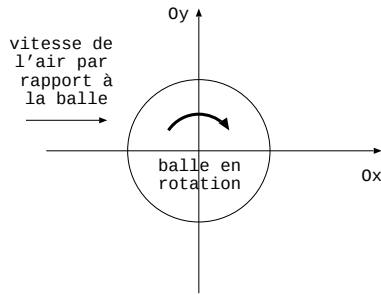
2. Appliquer la conservation du débit volumique.

On suppose que la pression est continue à la base des cheminées entre le liquide en écoulement et le liquide au repos dans les cheminées. Utiliser les lois de l'hydrostatique pour exprimer P_A et P_B en fonction de la pression atmosphérique P_0 , de g , ρ et des ordonnées z_A , z_B , z_{A1} et z_{B1} .

3. Tracer la ligne de courant passant par A et appliquer la relation de Bernoulli entre deux points bien choisis. En déduire l'expression de v_1 puis l'expression de D_v .

Réponse : $v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{S^2}{s^2} - 1}}$

VI. Effet Magnus

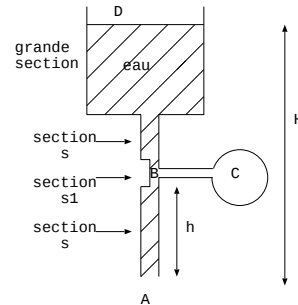
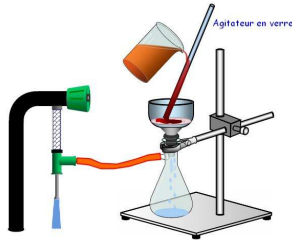


On étudie l'écoulement de l'air autour d'une balle assimilée à une sphère. La vitesse de l'air par rapport à la balle est selon $+Ox$. La balle a été mise en rotation selon $-Oz$ (voir son sens de rotation sur le schéma).

En utilisant le schéma avec les lignes de courant de l'air autour de la balle en rotation, et en précisant les hypothèses faites, donner l'allure du vecteur vitesse de la balle par rapport à l'air en présence de la rotation qu'on lui a imposé.

VII. Trompe à eau

Une trompe à eau est un dispositif servant à faire le vide. En chimie par exemple, elle est utilisée dans les montages de filtration. Elle est en général constituée d'un réservoir ouvert de très grande section dont le niveau en D est maintenu constant. L'eau s'écoule par un tube de section constante s sauf en un point B où il présente un rétrécissement et où la section est $s_1 = s/4$. En B , le tube est mis en communication avec un récipient C initialement rempli d'air à la pression atmosphérique. En fonctionnement l'eau ne pénètre pas dans C . On étudie maintenant ce dispositif lorsque le régime permanent est établi. On note P_0 la pression atmosphérique et on prendra $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$.



On donne $H = 50 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$, $s = 1 \text{ cm}^2$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$. Déduire de la conservation du débit volumique et de la relation de Bernoulli (on suppose que toutes les hypothèses sont vérifiées sauf celle d'un écoulement irrotationnel), les vitesses v_A et v_B de l'eau aux points A et B , et la pression de l'air dans C .

Réponses: $V_A = 3,6 \text{ m.s}^{-1}$, $V_B = 13 \text{ m.s}^{-1}$, $P_B = P_C = 2,4 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

VIII. Modèle simplifié de tornade (E3A 2022)

L'écoulement d'air est considéré comme parfait, incompressible et stationnaire. Le champ de vitesse est décrit par la relation $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{e}_\theta$ et un vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ tel que $\vec{\Omega} = \Omega_0\vec{e}_z$ pour $r \leq R$ et $\vec{\Omega} = \vec{0}$ pour $r > R$. Les effets de la pesanteur sont négligés et la masse volumique est notée μ .

Données
<u>Gradient en coordonnées cylindriques</u> $\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$
<u>Rotationnel en coordonnées cylindriques</u> $\vec{\text{rot}} \vec{f} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rf_\theta)}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rf_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$
<u>Accélération convective</u> $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v} = \vec{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \vec{\text{rot}}\vec{v} \wedge \vec{v}$

- Rappeler la définition d'une ligne de courant et représenter quelques lignes de courant de façon visible.
- Etablir les expressions de la vitesse $v_\theta(r)$ dans les deux domaines considérés. On précise que la vitesse est continue dans le domaine dans lequel elle est définie. Représenter $v_\theta(r)$ en fonction de r .
- On cherche le champ de pression dans le domaine $r > R$. On suppose que loin de la tornade la pression est égale à la pression atmosphérique soit $P(r \rightarrow \infty) = P_a$. Que peut-on dire de l'écoulement pour ces valeurs de r ? Déduire du théorème de Bernoulli, l'expression de $P(r)$.
- On cherche le champ de pression dans le domaine $r \leq R$. Que peut-on dire de l'écoulement pour ces valeurs de r ? Que peut-on en déduire pour la relation de Bernoulli? Expliquer pourquoi elle n'est pas intéressante ici pour trouver $P(r)$. Ecrire l'équation d'Euler et en déduire $P(r \leq R)$.
- On note $|P(r) - P(r = R)|$ la valeur absolue de la dépression. Pour quelle valeur de r cette grandeur est-elle maximale? Commenter.

Réponses: 2- $v(r \leq R) = \Omega_0 r$ et $v(r > R) = \frac{\Omega_0 R^2}{r}$ 3- $P(r > R) = P_a - \frac{\mu \Omega_0^2 R^4}{2r^2}$ 4- $P(r) = P_a + \frac{\mu \Omega_0 (r^2 - 2R^2)}{2}$ 5- en $r = 0$ au centre de la tornade

IX. Cavitation (E3A 2023 PC)

La cavitation est la naissance de bulles de gaz ou de vapeur dans un liquide en mouvement à de grandes vitesses. Ce phénomène très complexe est responsable du mauvais fonctionnement des pompes, de l'érosion de la surface des hélices de navires et de l'apparition de vibrations et de bruit qui sont particulièrement gênants dans le cadre de la discrétion acoustique voulue pour un sous-marin de type SNSLE. On étudie ici quelques aspects simples de la cavitation.

On considère un tube de Venturi horizontal et symétrique dans lequel s'écoule un liquide de viscosité négligeable. La section droite maximale est notée S_1 et la section minimale au niveau du col est notée S_2 . On suppose que dans le tube, les conditions d'application du théorème de Bernoulli sont remplies.

- Rappeler les conditions d'application du théorème de Bernoulli. Exprimer la différence de pression $P(C) - P(E)$ en fonction de la vitesse v_1 et des sections S_1 et S_2 . Les points E et C sont situés sur l'axe des x au niveau de l'entrée du tube et de son col. Donner l'allure du diagramme (P, T) où T est la température de l'eau. On indiquera les différents domaines d'existence des phases ainsi que deux points caractéristiques à nommer. Si l'on considère un point M situé dans le domaine où l'eau est liquide, justifier alors la possible apparition d'une bulle de vapeur dans l'écoulement dans une région du tube de Venturi que l'on indiquera sur un schéma.
- Représenter clairement l'allure de la pression P en fonction des abscisses x des points E, A, C, B et S.
- Un sous-marin est-il plus discret en eau chaude qu'en eau froide ? Si l'on suppose un diamètre de l'hélice

de 10 m, et en raisonnant sur l'extrémité des pales uniquement, les bulles de cavitation apparaissent-elles en haut ou en bas de l'hélice ? Afin de minimiser l'apparition des bulles de cavitation, les hélices des SNLE français sont carénées. L'hélice et son carénage forment la pompe-hélice.

Des études expérimentales montrent que le phénomène de cavitation est fortement corrélé avec l'existence de germes comme des impuretés ou à la présence de microbulles sphériques dans l'eau. La concentration des microbulles étant faible, on va supposer que les propriétés physiques de l'eau ne sont pas modifiées. L'écoulement est supposé non visqueux et incompressible dans toute la suite. On considère une microbulle sphérique de centre O et de rayon $R(t)$ plongée dans l'eau. On pose $P_\infty(t)$ la pression de l'eau à l'infini où l'eau est au repos. A $t = 0$, la microbulle contient une masse m_0 de gaz dit inclus (de l'air par exemple) ainsi que de la vapeur d'eau, son rayon est $R(t=0) = R_0$ et la pression de l'eau à l'infini est $P_{\infty,0}$.

La pression de l'eau à l'infini évolue au cours du temps ce qui fait varier le rayon de la microbulle. La masse de gaz inclus est supposée constante au cours de l'évolution supposée isotherme de la microbulle. On considère que l'écoulement est radial à symétrie sphérique. Les champs de vitesses et de pression dans l'eau peuvent s'écrire: $\vec{v} = v(r,t)\vec{e}_r$ et $P = P(r,t)$.

4. Écrire l'équation locale traduisant la conservation de la masse dans l'eau. Quelle relation peut-on déduire de l'imperméabilité de la paroi Σ de la microbulle? À l'aide des données, déduire de ces deux relations la relation suivante: $v(r,t) = -\frac{A(t)}{r^2}$.

Montrer que $A(t) = -R^2(t)\frac{dR(t)}{dt}$.

5. Écrire l'équation d'Euler. En déduire l'expression de $\frac{\partial P}{\partial r}(r,t)$ en fonction de ρ_0 , r , $A(t)$ et de ses dérivées temporelles. On néglige la pesanteur.

Par intégration, on peut montrer (ce n'est pas demandé ici) qu'on obtient l'équation de Rayleigh: $P(r,t) = P_\infty(t) + \rho_0[R(t)\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}(\frac{dR}{dt})^2]$.

On s'intéresse à l'implosion d'une microbulle. On suppose pour simplifier l'étude qu'elle ne contient pas de gaz inclus, la pression à l'infini est maintenue constante et égale à $P_\infty(t)$, supérieure à la pression de vapeur saturante $P_{sat}(T)$. Dans ce cas, l'équation de Rayleigh peut être intégrée; on trouve, après un calcul qui

n'est pas demandé ici: $\frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{3\rho_0}(P_{inf,0} - P_{sat}(T))[(\frac{R_0}{R(t)})^3 - 1]}$.

6. Exprimer la durée τ , appelée temps de Rayleigh, que met la bulle à disparaître en fonction de ρ_0 , $P_{\infty,0}$, $P_{sat}(T)$ et R_0 ainsi que de l'intégrale suivante dont on donne la valeur approchée. On pourra poser

$$u = R/R_0: J = \int_0^1 \sqrt{\frac{u^3}{1-u^3}} du = 0,747.$$

Calculer numériquement τ avec les valeurs suivantes: $\rho_0 = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $P_{\infty,0} = 1,0.10^5 \text{ Pa}$, $P_{sat}(T) = 2,4.10^3 \text{ Pa}$, $R_0 = 2,0 \text{ mm}$. Commenter par rapport à la durée typique d'évolution d'une bulle dans une boisson pétillante.

Formulaire:

- En coordonnées sphériques : $\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}$

- $(\vec{v} \cdot \vec{grad})\vec{v} = v_r \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial r}$ en coordonnées sphériques, pour $\vec{v} = v_r(r,t)\vec{e}_r$