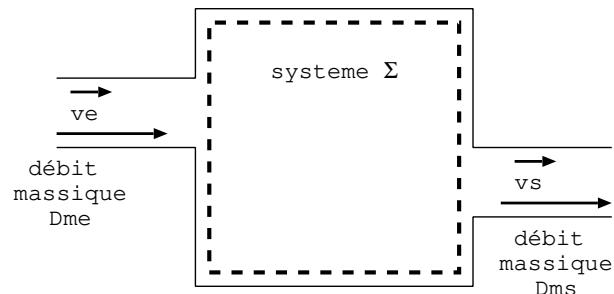


# Chap MF5 : bilans macroscopiques

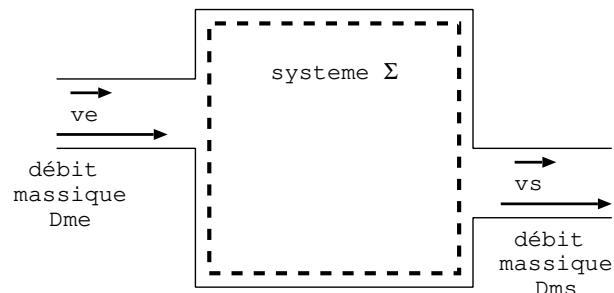
On étudie dans ce chapitre des fluides en écoulement qui traversent une turbine, une pompe, un coude,... L'objectif est de savoir réaliser un bilan de masse, un bilan de quantité de mouvement et un bilan d'énergie cinétique à ces systèmes.



Les notations pour décrire ces dispositifs:



On peut aussi faire appel à un système fermé pour décrire ces dispositifs.



Remarque: Le système fermé et mobile  $\Sigma^*$  peut aussi se définir comme en thermodynamique industriel:

## I. Bilan de masse

On peut réaliser un bilan de masse sur le système fermé ou sur le système ouvert précédemment définis.

### 1. Bilan de masse sur le système ouvert

## 2. Bilan de masse sur le système fermé

### II. Bilan de quantité de mouvement

La loi de la quantité de mouvement s'écrit:

Cette loi ne s'applique qu'au système fermé  $\Sigma^*$ .

avec  $\vec{p}_{\Sigma^*}(t) =$

avec  $\vec{p}_{\Sigma^*}(t + dt) =$

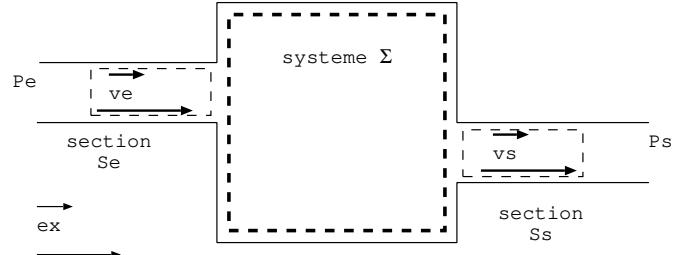
On a donc  $d\vec{p}_{\Sigma^*} =$

Quelles sont les forces extérieures exercées sur le système  $\Sigma^*$ ?

Le poids est très souvent négligé.

Le réflexe à avoir est de chercher les forces exercées "à droite", "à gauche", "dedans" et "sur la surface latérale du système".

- à droite du système:



- à gauche du système:

- à l'intérieur:

- sur la surface latérale: on distingue deux situations: le système est délimité par une canalisation ou le système est délimité par des lignes de courant:

Attention: dans certains exercices on demande d'exprimer la force exercée par le fluide sur une hélice ou par le fluide sur la canalisation. Comment s'y prend-on?

### III. Bilan d'énergie cinétique ou d'énergie mécanique

#### 1. Cas où l'on ne tient pas compte de la pesanteur

On applique le théorème de la puissance cinétique au système fermé  $\Sigma^*$ . Il s'écrit:

avec  $E_{c,\Sigma^*}(t) =$

avec  $E_{c,\Sigma^*}(t + dt) =$

On a donc  $dE_{c,\Sigma^*} =$

avec la puissance des forces intérieures nulle pour un fluide parfait

#### 2. Cas où l'on tient compte de la pesanteur

On applique le théorème de la puissance mécanique au système fermé  $\Sigma^*$ . Il s'écrit:

avec  $E_{m,\Sigma^*}(t) =$

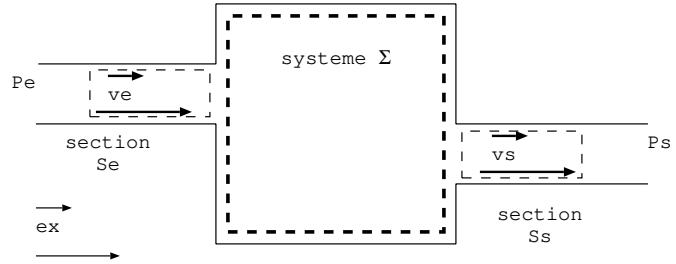
avec  $E_{m,\Sigma^*}(t + dt) =$

On a donc  $dE_{m,\Sigma^*} =$

### 3. Expression des puissances des forces extérieures

Le réflexe à avoir est de chercher les forces exercées "à droite", "à gauche", "dedans" et "sur la surface latérale du système".

- à droite du système:



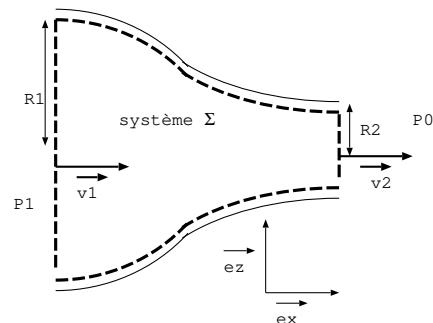
- à gauche du système:

- à l'intérieur:

- sur la surface latérale: on distingue deux situations: le système est délimité par une canalisation ou le système est délimité par des lignes de courant:

### IV. Force exercée sur un embout

L'embout d'une lance d'incendie a un rayon  $R_2 = 5 \text{ cm}$ . Il est vissé à un tube cylindrique de rayon  $R_1 = 10 \text{ cm}$ . Quand l'embout est ouvert à l'air libre ( $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ), la lance d'incendie a pour débit volumique  $D_v = 40 \text{ L.s}^{-1}$ . Le fluide est parfait, l'écoulement est permanent et incompressible. On néglige la pesanteur.



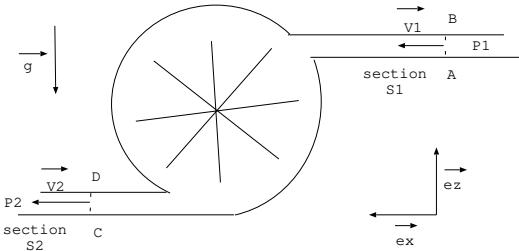
1. Calculer les vitesses  $v_1$  et  $v_2$ .
2. Utiliser la relation de Bernoulli pour calculer la pression  $P_1$  en amont de l'écoulement.
3. On considère le système ouvert et fixe  $\Sigma$ . On note  $\delta m_e$  et  $\delta m_s$  les masses de fluide qui entre dans le système  $\Sigma$  et qui en sort entre  $t$  et  $t + dt$ . Définir le système fermé  $\Sigma^*$  à  $t$  et à  $t + dt$ . Déduire de la loi de la quantité de mouvement appliquée à  $\Sigma^*$  la force qu'exerce l'embout sur le fluide et en déduire la force exercée par le fluide sur l'embout.

Réponses :  $v_1 = 1,27 \text{ m/s}$ ,  $v_2 = 5,1 \text{ m/s}$ ,  $P_1 = 1,12 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,

$$\vec{F}_{\text{embout/fluide}} = (P_0 \pi R_2^2 - P_1 \pi R_1^2 + \rho D_v (v_2 - v_1)) \vec{e}_x$$

## V. Puissance fournie à une turbine

De l'eau circule dans une turbine de 1 vers 2. Les rayons des sections d'entrée et de sortie sont  $R_1 = 15 \text{ cm}$  et  $R_2 = 30 \text{ cm}$ . Le débit volumique est  $D_v = 0,22 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$  et la dénivellation est  $z_1 - z_2 = 1 \text{ m}$ . Les pressions en 1 et 2 sont  $P_1 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  et  $P_2 = 0,65 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . L'eau est un fluide parfait et incompressible.



On considère le système ouvert et fixe  $\Sigma$  compris entre  $AB$  et  $CD$ . Définir un système fermé contenant  $\Sigma^*$  et déduire du théorème de la puissance mécanique appliqué à  $\Sigma^*$  la puissance fournie par l'hélice au fluide.

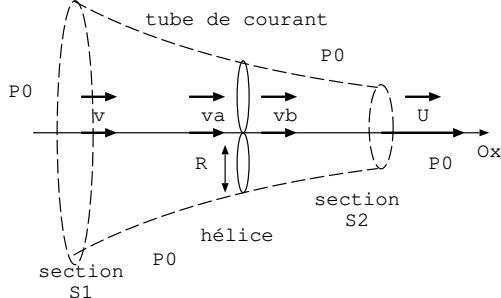
$$\text{Réponse : } P = \frac{\rho}{2} D_v (v_2^2 - v_1^2) + \rho D_v g (z_2 - z_1) + D_v (P_2 - P_1)$$

## VI. Débit d'un ventilateur

Un ventilateur dont les pales ont pour rayon  $R = 0,25 \text{ m}$ , consomme une puissance électrique  $\mathcal{P}_{el} = 140 \text{ W}$ . On souhaite déterminer le débit volumique  $D_v$  du courant d'air qu'il produit. La masse volumique de l'air est  $\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ . On néglige la pesanteur.



Hypothèses : l'écoulement d'air induit par l'hélice est unidimensionnel, parfait et incompressible, les efforts de pesanteur sont négligeables, le tube de courant est de révolution autour de l'axe de l'hélice et sa section a pour aire, au niveau de l'hélice, celle du disque balayée par l'hélice. Pour un écoulement parfait et incompressible la puissance des efforts intérieurs est nulle. Loin en amont et en aval de l'hélice l'écoulement est uniforme et la vitesse  $v$  en amont est négligeable devant la vitesse  $U$  en aval. La pression est uniforme et vaut  $P_0$ , la pression atmosphérique.



1. Justifier l'allure du tube de courant porté sur le schéma précédent.
2. Montrer que les vitesses  $v_a$  et  $v_b$  sont égales et les exprimer en fonction de  $D_v$  et  $R$ .
3. On définit le système ouvert et fixe  $\Sigma$  compris entre les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  représentées sur le schéma. Définir un système fermé et mobile  $\Sigma^*$ . Deduire du théorème de la puissance cinétique appliquée à  $\Sigma^*$  que la puissance de l'hélice s'écrit  $\mathcal{P}_{el} = \frac{\rho D_v U^2}{2}$ . En déduire la force exercée par l'hélice sur le fluide en fonction de  $\rho$ ,  $D_v$ ,  $U$  et  $v_a$ .
4. Déduire d'un bilan de quantité de mouvement appliquée à  $\Sigma^*$ , l'expression de la force qu'exerce l'hélice sur le fluide en fonction de  $\rho$ ,  $D_v$  et  $U$ . En déduire la relation entre  $U$  et  $v_a$ .
5. On suppose que toute la puissance électrique reçue par le ventilateur est donnée à l'hélice. Exprimer  $P_{el}$  en fonction de  $\rho$ ,  $D_v$  et  $R$ . En déduire l'expression et la valeur numérique du débit volumique.
6. L'application du théorème de Bernoulli entre un point très en amont et un point très en aval conduit à un résultat erroné : expliquer.

$$\text{Réponse : } U = 2v_a, \quad \mathcal{P}_{el} = \frac{2\rho D_v^3}{\pi^2 R^4}$$

## VII. Force sur un coude

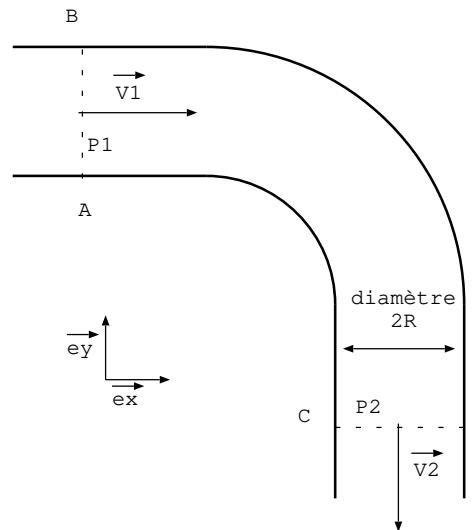
Un fluide parfait et incompressible de masse volumique  $\rho$  s'écoule dans une canalisation cylindrique de rayon  $R$  présentant un coude. On néglige les effets de pesanteur. On définit le système ouvert noté  $\Sigma$  compris entre les parois fixes  $AB$  et  $CD$ . On note avec un indice 1 les grandeurs physiques du fluide à l'entrée du coude et avec un indice 2 celles en sortie du coude. On se place en régime stationnaire. On note  $D_v$  le débit volumique.

1. Déterminer la relation simple entre  $v_1$  et  $v_2$ . En déduire la relation simple entre  $P_1$  et  $P_2$ .

2. Définir un système fermé  $\Sigma^*$  à partir du système ouvert  $\Sigma$ . Exprimer la dérivée de la quantité de mouvement de  $\Sigma^*$  par rapport au temps en fonction de  $\rho$ ,  $D_v$ ,  $R$  et des vecteurs de base  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ .

3. Déduire de la loi de la quantité de mouvement, l'expression de la force exercée par le fluide sur le coude en fonction de  $\rho$ ,  $D_v$ ,  $P_1$ ,  $R$  et des vecteurs de base  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ .

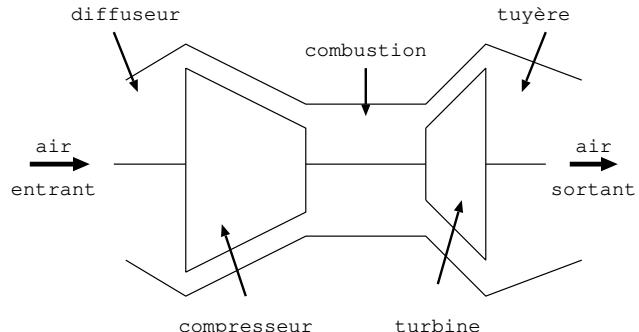
4. Tracer l'allure des lignes de courant dans le coude. Déterminer la direction et le sens de la force de pression exercée par le fluide sur le coude.



$$\text{Réponse: } \vec{F}_{\text{coude/fluide}} = -\left(\frac{\rho D_v^2}{\pi R^2} + P_1\right)(\vec{e}_y + \vec{e}_x)$$

### VIII. Turboréacteur (CCINP PC 2020)

Dans cette partie on étudie un turboréacteur dit simple flux pour lequel le gaz entrant dans le réacteur passe dans un diffuseur pour en diminuer la vitesse avant d'être comprimé par le compresseur. Le gaz comprimé arrive dans une chambre de combustion où il est chauffé avant d'être détendu partiellement dans la turbine qui fournit la puissance nécessaire au compresseur. En sortie de turbine, le gaz reste à une pression relativement élevée par rapport à la pression extérieure et il est détendu dans une tuyère, ce qui permet de l'accélérer : c'est cette accélération qui permet la propulsion de l'avion.



Le turboréacteur constitue un système ouvert  $\Sigma$ . En régime stationnaire, ce volume de contrôle contient à l'instant  $t$  une masse d'air  $M(t)$  à laquelle on associe une quantité de mouvement  $\vec{p}(t)$ . Pour établir le bilan de quantité de mouvement, on doit définir un système fermé  $\Sigma^*$  qui, à l'instant  $t$ , est constitué de  $M(t)$  et d'une masse entrante dans la tuyère  $\delta m_e$  à la vitesse  $\vec{v}_e$  et, à l'instant  $t + dt$  est constitué de  $M(t + dt)$  et d'une masse sortante de la tuyère  $\delta m_s$  à la vitesse  $\vec{v}_s$ .

La pression  $P_0$  autour du turboréacteur est uniforme. La surface d'entrée du turboréacteur est notée  $S_e$  et celle de sortie  $S_s$ .

1. Donner l'expression du vecteur quantité de mouvement du système fermé  $\vec{p}^*(t)$  à l'instant  $t$ .
2. Donner l'expression du vecteur quantité de mouvement du système fermé  $\vec{p}^*(t + dt)$  à l'instant  $t + dt$ .
3. Des deux questions précédentes déduire, en régime stationnaire, l'expression de la dérivée du vecteur quantité de mouvement du système fermé  $\frac{d\vec{p}^*(t)}{dt}$  à l'instant  $t$ . On introduira  $D_m$  débit massique d'air dans le réacteur.
4. Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le système.
5. Indiquer quelle(s) approximation(s) est/sont nécessaire(s) pour conclure que la force appliquée par le réacteur à l'air a pour expression :  $\vec{F}_{\text{reacteur-air}} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e)$ .
6. En considérant un réacteur positionné horizontalement avec son entrée à gauche comme indiqué sur la figure, représenter qualitativement le vecteur de la force exercée par l'air sur le réacteur ainsi que les vecteurs  $\vec{v}_e$  et  $\vec{v}_s$  dans le référentiel du réacteur. Comparer les normes de  $v_e$  et  $v_s$  des vecteurs vitesses pour que la force exercée par l'air sur l'avion soit propulsive.

$$\text{Réponses: } 3- \frac{d\vec{p}^*}{dt} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e) \quad 6- v_s > v_e$$