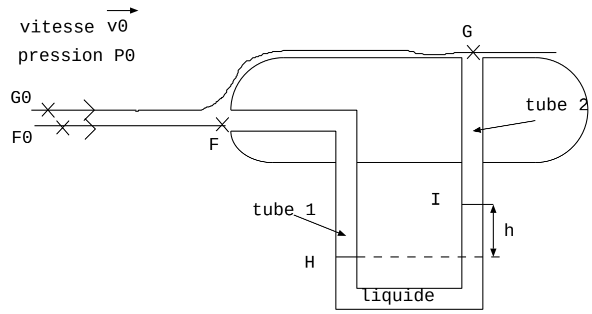
TD dynamique des fluides parfaits

I. **Tube de pitot**

1.



2. Dans le tube de Pitot, l'air est statique, F est un point d'arrêt, en F la vitesse de l'air est nulle.

En G on fait l'hypothèse que l'appareil de mesure modifie peu l'écoulement donc $v_G \approx v_0$.

En F_0 et en G_0, on est loin de l'appareil de mesure la pression est P_0 et la vitesse est v_0.

Hypothèses: écoulement stationnaire et incompressible, fluide parfait, sans autres forces que les forces de pression et de viscosité. On applique Bernoulli sur les lignes de courant entre F_0 et F, puis entre G_0 et G. Le fluide est un gaz donc on peut négliger le terme ρgz lié à la force poids.

$\dfrac{\rho v_{F_0}^2}{2} + P_{F_0} = \dfrac{\rho v_F^2}{2} + P_F$ soit $\dfrac{\rho v_0^2}{2} + P_0 = P_F$

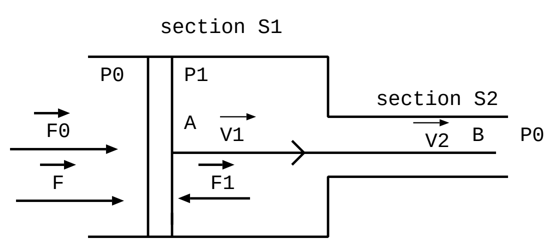
$\dfrac{\rho v_{G_0}^2}{2} + P_{G_0} = \dfrac{\rho v_G^2}{2} + P_G$ soit $\dfrac{\rho v_0^2}{2} + P_0 = \dfrac{\rho v_0^2}{2} + P_G$

On a donc $\dfrac{\rho v_0^2}{2} + P_0 = P_F = \dfrac{\rho v_0^2}{2} + P_G$. soit $P_F = \dfrac{\rho v_0^2}{2} + P_G$.

3. Dans le manomètre, la pression en H est égale à la pression P_F et la pression en I est égale à la pression P_G. On applique la statique des fluides dans le liquide dans le tube en U: $P_H = P_I + \rho_l gh$ ou encore $P_F = P_G + \rho_l gh$.

On combine les résultats des deux questions soit $P_F - P_G = \rho_l gh = \dfrac{\rho v_0^2}{2}$ soit $v_0 = \sqrt{\dfrac{2\rho_l gh}{\rho}}$.

II. **Débit d'une seringue**



Le débit volumique dans la seringue est $D_v = v_2 S_2 = v_1 S_1$.

Le piston subit son poids compensé par la réaction de la seringue, les forces de pression $\overrightarrow{F_0} = +P_0 S_1 \overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{F_1} = -P_1 S_1 \overrightarrow{e_x}$, et la force de l'opérateur $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{e_x}$.

Le piston se déplace à vitesse constante donc la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle soit selon Ox: $+F + P_0 S_1 - P_1 S_1 = 0$ d'où $P_1 = P_0 + \dfrac{F}{S_1}$.

Le fluide est parfait en écoulement incompressible et stationnaire, il n'y a pas de pièces mobiles donc pas d'autres forces que les forces de pression et poids donc on peut appliquer la relation de Bernoulli entre deux points A et B sur une même ligne de courant:

$\dfrac{\rho v_A^2}{2} + \rho g z_A + P_A = \dfrac{\rho v_B^2}{2} + \rho g z_B + P_B$ avec $P_A = P_1 = P_0 + \frac{F}{S_1}$, $P_B = P_0$, $z_A = z_B$, $v_A = v_1 = \dfrac{D_v}{S_1}$ et $v_B = v_2 = \dfrac{D_v}{S_2}$.

On obtient en remplaçant dans l'équation de Bernoulli et après simplification: $\dfrac{\rho D_v^2}{2S_1^2} + \dfrac{F}{S_1} = \dfrac{\rho D_v^2}{2S_2^2}$ soit

$\frac{\rho D_v^2}{2}(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}) = \frac{\rho D_v^2}{2}\frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1^2 S_2^2} = \frac{F}{S_1}$ d'où $D_v = \sqrt{\frac{2FS_1S_2^2}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$.

III. **Siphon**

1. Le fluide est parfait en écoulement incompressible et stationnaire, il n'y a pas de pièces mobiles donc pas d'autres forces que les forces de pression et poids donc on peut appliquer la relation de Bernoulli sur la ligne de courant passant par O, A, B et S:

$$\frac{\rho v_O^2}{2} + \rho g z_O + P_O = \frac{\rho v_A^2}{2} + \rho g z_A + P_A = \frac{\rho v_B^2}{2} + \rho g z_B + P_B = \frac{\rho v_S^2}{2} + \rho g z_S + P_S$$

Ici on a $P_O = P_S = P_0$ car S et O sont en contact avec l'atmosphère et $v_O = 0$ car le niveau d'eau est maintenu constant en O.

On a également $v_A = v_B = v_S$ par conservation du débit volumique $D_v = v_A S = v_B S = v_S S$ avec une section S constante.

J'utilise la relation de Bernoulli entre O et B en prenant $z = 0$ en S avec un axe Oz vertical ascendant: $\rho g h_S + P_O = \frac{\rho v_B^2}{2} + \rho g(h_S + h_B) + P_B$ d'où $P_B = P_0 - \rho g h_B - \frac{\rho v_B^2}{2} = P_0 - \rho g h_B - \frac{\rho D_v^2}{2S^2}$: plus l'altitude du point B est grande et plus la pression en B est petite, ce qui traduit que le point dans le siphon où la pression est la plus faible est celui où l'altitude est la plus grande.

2. On veut éviter la cavitation en B donc on veut $P_B > 0$ soit $P_0 - \rho g h_B - \frac{\rho D_v^2}{2S^2} > 0$ soit encore $\frac{\rho D_v^2}{2S^2} < P_0 - \rho g h_B$ soit $D_v = S\sqrt{\frac{2(P_0 - \rho g h_B)}{\rho}}$.

IV. **Vidange d'un réservoir**

1. Les lignes de courant se resserrent en B (on sait donc qu'en B la vitesse du fluide est plus grande et la pression plus faible).

2. Le fluide est parfait en écoulement incompressible et stationnaire, il n'y a pas de pièces mobiles donc pas d'autres forces que les forces de pression et poids donc on peut appliquer la relation de Bernoulli sur la ligne de courant passant par O, A, B et S:

$P_A + \rho g z_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_B + \rho g z_B + \frac{\rho v_B^2}{2}$ avec $P_A = P_B = P_0$, $z_A = h(t)$, $z_B = 0$ et par conservation du débit volumique pour l'écoulement incompressible on a $v_A \pi R^2 = v_B \pi a^2$.

On en déduit donc $\rho g h(t) + \frac{\rho v_A^2}{2} = \frac{R^4 \rho v_A^2}{2a^4}$ d'où la vitesse en A : $v_A = \sqrt{\frac{2gh(t)}{\frac{R^4}{a^4} - 1}} \approx \frac{a^2}{R^2}\sqrt{2gh(t)}$ pour $a << R$.

3. La vitesse est égale à la dérivée de la position par rapport au temps le point A a pour position $h(t)$ donc on a $v_A = -\frac{dh}{dt}$ (ne pas oublier le signe $-$, h diminue donc $\frac{dh}{dt} < 0$ et $v_A > 0$).

On a donc une équation différentielle non linéaire, que l'on résout en séparant les variables: $\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{2gh(t)}{\frac{a^4}{s^2} - 1}}$ soit $\int_{h_0}^{0} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{\frac{2g}{\frac{R^4}{a^4} - 1}} \int_0^{\tau} dt$ (le récipient se vide jusqu'à ce que $h = 0$).

On a donc $[2\sqrt{h}]_{h_0}^0 = -2\sqrt{h_0} = -\sqrt{\frac{2g}{\frac{R^4}{a^4} - 1}}\tau$ d'où $\tau = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\sqrt{\frac{R^4}{a^4} - 1}$.

V. **Tube de Venturi utilisé en débitmètre**

1. Dans la section s les lignes de courant sont resserrées donc la vitesse du fluide est plus grande et la pression est plus faible.

2. La conservation du débit volumique pour un écoulement incompressible s'écrit $D_v = v_1 S = v_2 s$.

Les lois de l'hydrostatique donnent $P_A = P_0 + \rho g(z_{A_1} - z_A)$ et $P_B = P_0 + \rho g(z_{B_1} - z_B)$.

3. Le fluide est parfait en écoulement incompressible et stationnaire, il n'y a pas de pièces mobiles donc pas d'autres forces que les forces de pression et poids donc on peut appliquer la relation de Bernoulli sur la ligne de courant passant par A et B:

$$P_A + \rho g z_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_B + \rho g z_B + \frac{\rho v_B^2}{2} \text{ avec } v_A = v_1 \text{ et } v_B = v_2 = \frac{v_1 S}{s}$$

En utilisant les expressions de P_A et P_B on a:

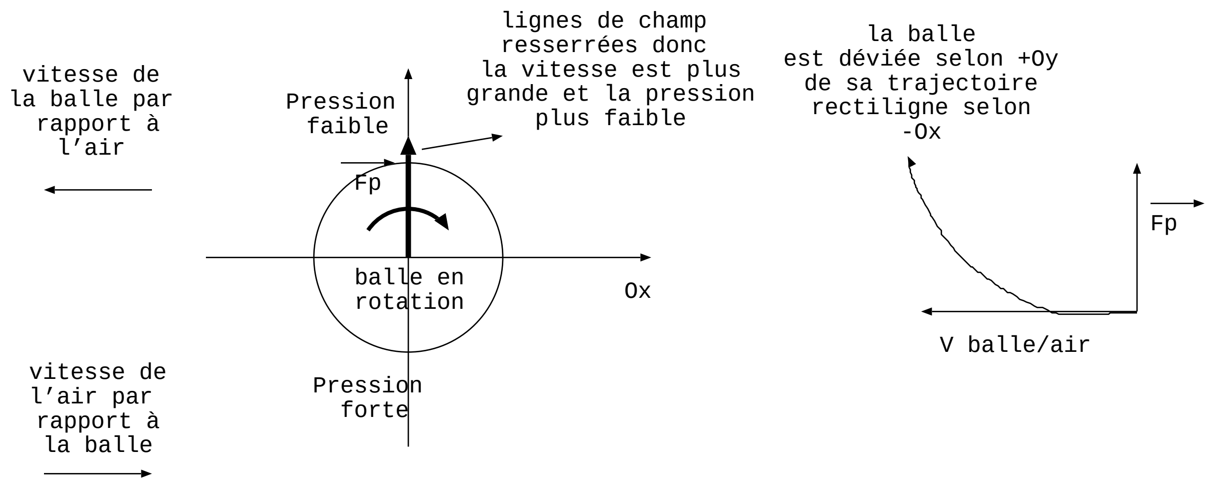
$$P_0 + \rho g(z_{A_1} - z_A) + \rho g z_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_0 + \rho g(z_{B_1} - z_B) + \rho g z_B + \frac{\rho v_B^2}{2}$$

soit $\rho g z_{A_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g z_{B_1} + \frac{\rho v_1^2 S^2}{2s^2}$ soit $\frac{\rho v_1^2}{2}(1 - \frac{S^2}{s^2}) = -\rho g h$

d'où $v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{S^2}{s^2} - 1}}$ et $D_v = v_1 S$.

VI. **Effet Magnus**

On suppose l'écoulement de l'air incompressible, stationnaire, et on néglige la viscosité de l'air.



VII. **Trompe à eau**

Les lignes de courant en B ses resserrent donc la vitesse augmente en ce point et la pression y est plus faible. Le gaz en C est en contact avec le liquide en B de pression plus faible donc le gaz est aspiré par l'eau en écoulement. Ainsi on peut faire diminuer la pression en C.

On écrit la conservation du débit volumique:

Le fluide est parfait en écoulement incompressible et stationnaire, il n'y a pas de pièces mobiles donc pas d'autres forces que les forces de pression et poids donc on peut appliquer la relation de Bernoulli sur la ligne de courant passant par D, B, et A:

$$P_A + \rho g z_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_B + \rho g z_B + \frac{\rho v_B^2}{2} = P_D + \rho g z_D + \frac{\rho v_D^2}{2}$$

La vitesse en D est nulle car le niveau d'eau est maintenu constant.

D et A sont en contact avec l'atmosphère donc ils sont à la pression P_0.

B est en contact avec le gaz en C donc $P_B = P_C$.

Je choisis $z = 0$ au point A:

$$P_0 + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_C + \rho g h + \frac{\rho v_B^2}{2} = P_0 + \rho g H$$

On écrit la conservation du débit volumique $v_B s_1 = v_A s$ d'où $v_B = 4v_A$ car $s_1 = s/4$.

On a donc $P_0 + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_0 + \rho g H$ donc $v_A = \sqrt{2\rho g H} = 3,6\ m/s$ et donc $v_B = 4v_A = 13,6\ m/s$.

On applique ensuite $P_C + \rho g h + \frac{\rho v_B^2}{2} = P_0 + \rho g H$ pour en déduire P_C soit $P_C = \rho g(H - h) - \frac{\rho v_B^2}{2} = 2,4.10^4\ Pa$.

VIII. **Correction : Tornade**

1. Les lignes de courant sont les lignes orientées tangentes au vecteur vitesse en tout point. Dans le cas de la tornade, ce sont des cercles centrés sur Oz.

2. On a $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}v$ avec $v_r = v_z = 0$ et $v_\theta = v(r)$. On remplace dans l'expression du rotationnel soit il reste $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}v = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}(rv_\theta(r))\overrightarrow{e_z}$.

On a donc $\frac{d}{dr}(rv_\theta(r)) = 2\Omega r$.

Ainsi pour $r < R$: $\Omega = \Omega_0$ soit $\frac{d}{dr}(rv_\theta(r)) = 2\Omega_0 r$

d'où en intégrant par rapport à r: $rv_\theta(r) = \Omega_0 r^2 + A$

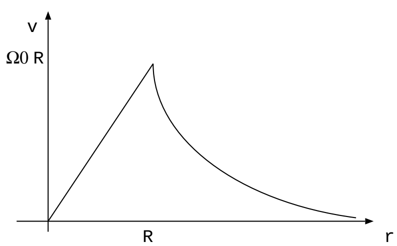
et en divisant par r: $v_\theta(r) = \Omega_0 r + \frac{A}{r}$.

Le terme $\frac{A}{r}$ diverge quand r tend vers zéro donc on doit prendre $A = 0$. Ainsi $v_\theta(r) = \Omega_0 r$ pour $r < R$.

De même pour $r > R$: $\Omega = 0$ soit $\frac{d}{dr}(rv_\theta(r)) = 0$.

Ce qui signifie que $rv_\theta(r) = B$ soit $v_\theta(r) = \frac{B}{r}$.

On trouve B en écrivant que la vitesse est continue en R soit $v_\theta(r = R) = \Omega_0 R = \frac{B}{R}$ donc $B = \Omega_0 R^2$. On a donc $v_\theta(r) = \frac{\Omega_0 R^2}{r}$.



3. Dans la zone $r > R$, l'écoulement est irrotationnel, stationnaire, incompressible et le fluide est parfait donc la relation de Bernoulli dit que $\frac{\mu v^2}{2} + P$ est constante dans tout le fluide (on a négligé le terme lié au poids $\mu g z$). On a donc $\frac{\mu v(r)^2}{2} + P(r) = P(r \to \infty) + \frac{\mu v(r \to \infty)^2}{2} = P_a$ soit, avec $v(r) = \frac{\Omega_0 R^2}{r}$, on a $P(r) = P_a - \frac{\mu \Omega_0^2 R^4}{2r^2}$.

4. Dans la zone $r < R$, l'écoulement n'est pas irrotationnel donc la relation de Bernoulli indique que la quantité $\frac{\mu v^2}{2} + P$ est constante sur une ligne de courant.

0n doit reprendre l'équation d'Euler: $\mu(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}(\frac{v^2}{2}) + \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\text{grad}}P$.

avec $\overrightarrow{\text{grad}}(\frac{v^2}{2}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\frac{\Omega_0^2 r^2}{2}) = \frac{d}{dr}(\frac{\Omega_0^2 r^2}{2})\overrightarrow{e_r} = \Omega_0^2 r\overrightarrow{e_r}$

avec $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{v} = 2\Omega_0\overrightarrow{e_z}\Lambda\Omega_0 r\overrightarrow{e_\theta} = -2\Omega_0^2 r\overrightarrow{e_r}$.

d'où $-\mu\Omega_0^2 r\overrightarrow{e_r} = -\overrightarrow{\text{grad}}P$ soit $\frac{dP}{dr} = \mu\Omega_0^2 r$ et donc $P(r) = \frac{\mu\Omega_0 r^2}{2} + B$.

On trouve B en écrivant la continuité de la pression en $r = R$ soit $P(r = R) = P_a - \frac{\mu\Omega_0^2 R^2}{2} = \frac{\mu\Omega_0 R^2}{2} + B$ d'où $B = P_a - \mu\Omega_0 R^2$ et $P(r) = P_a + \frac{\mu\Omega_0(r^2 - 2R^2)}{2}$ pour $r < R$.

5. D'après les questions précédentes:

$P(r) - P_a = -\frac{\mu\Omega_0(2R^2 - r^2)}{2} < 0$ et $|P(r) - P_a| = \frac{\mu\Omega_0(2R^2 - r^2)}{2}$ pour $r < R$: donc $|P(r) - P_a|$ est maximale pour $r = 0$ et la valeur maximale est $\mu\Omega_0^2 R^2$.

$P(r) - P_a = -\dfrac{\mu\Omega_0^2 R^4}{2r^2} < 0$ pour $r > R$ et $|P(r) - P_a| = \dfrac{\mu\Omega_0^2 R^4}{2r^2}$: cette fonction est maximale pour $r = R$ et la valeur maximale est $\dfrac{\mu\Omega_0^2 R^2}{2}$.

Ainsi on conclut que la dépression est maximale pour $r = 0$, c'est donc au centre de la tornade que c'est le plus dangereux.