Correction du TD nombre de Reynolds

I. Force de trainée

On considère une sphère de rayon R, de vitesse v, en mouvement uniforme dans un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ.

1. Le coefficient de traînée est sans unité donc F est homogène à $R^\alpha v^\gamma \rho^\lambda$ ce qui donne $kg.m.s^{-2} = m^\alpha (m.s^{-1})^\gamma (kg.m^{-3})^\lambda$ soit $kg.m.s^{-2} = kg^\lambda m^{\alpha+\gamma-3\lambda} s^{-\gamma}$.

Par identification on a $\lambda = 1$, $-\gamma = -2$ et $\alpha + \gamma - 3\lambda = 1$ soit $\alpha = -\gamma + 3\lambda + 1 = -2 + 3 + 1 = 2$.

La force de traînée est donc de la forme $F = \dfrac{\pi}{2} C_x R^2 v^2 \rho$.

2. Pour un écoulement laminaire ($\mathcal{R}_e < 1$), la loi de Stokes donne l'expression de la force de trainée soit $\overrightarrow{F} = -6\pi R\eta \overrightarrow{v}$. On a donc d'après la question précédente $6\pi R\eta v = \dfrac{\pi}{2} C_x R^2 v^2 \rho$ soit $C_x = \dfrac{12\eta}{\rho v R}$.

Or pour une sphère le nombre de Reynolds s'écrit $\mathcal{R}e = \dfrac{\rho v(2R)}{\eta}$. On a donc $C_x = \dfrac{24}{\mathcal{R}e}$.

3. Pour un fluide parfait, la viscosité est nulle, la force de traînée aussi.

II. Viscosimètre à bille

1. La bille sphérique de rayon R subit son poids $\rho_b \dfrac{4\pi R^3}{3} \overrightarrow{g}$, la poussée d'Archimède $-\rho_f \dfrac{4\pi R^3}{3} \overrightarrow{g}$ et la force de traînée $\overrightarrow{F} = -6\pi R\eta \overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$

En régime stationnaire, la bille a un mouvement rectiligne uniforme donc son accélération est nulle soit $\rho_b \dfrac{4\pi R^3}{3} \overrightarrow{g} - \rho_f \dfrac{4\pi R^3}{3} \overrightarrow{g} - 6\pi R\eta \overrightarrow{v_l} = \overrightarrow{0}$.

On en déduit la norme de la vitesse limite $v_l = \dfrac{2gR^2(\rho_b - \rho_l)}{9\eta}$.

2. AN: $\eta = \dfrac{2gR^2(\rho_b - \rho_l)}{9 v_l} = 0,98\ Pl$

3. Le nombre de Reynolds s'écrit $\mathcal{R}_e = \dfrac{\rho_l v_l 2R}{\eta} = 9,3.10^{-3} << 1$: un faible nombre de Reynolds justifie une force de traînée proportionnelle à la vitesse du fluide.

III. Mouvement d'une sphère dans un fluide

1. On calcule le nombre de Reynolds de l'écoulement de l'eau autour de la bactérie soit: $\mathcal{R}e = \dfrac{\rho v 2R}{\eta} = \dfrac{10^3.2.10^{-3}.200.10^{-6}}{10^{-3}} = 0,4$: pour un tel nombre de Reynolds, l'écoulement est laminaire, les effets diffusifs l'emportent.

2. Pour de faibles nombres de Reynolds, la courbe $\log C_x$ en fonction de $\log \mathcal{R}e$ est une droite. On a donc $\log C_x = a \log \mathcal{R}e + b$.

Cette droite passe par les points $P_1(\mathcal{R}e = 1, C_x = 24)$ et $P_2(\mathcal{R}e = 10, C_x = 2,4)$.

On calcule la pente de la droite $a = \dfrac{y_{P_2} - y_{P_1}}{x_{P_2} - x_{P_1}} = \dfrac{\log(2,4) - \log(24)}{\log(10) - \log(1)} = -1$.

On en déduit l'ordonnée à l'origine en écrivant que la droite passe par le point P_1 (je peux prendre le point P_2 c'est pareil): $\log 24 = -\log\infty + b$ soit $b = \log 24$.

On a donc $\log C_x = -\log \mathcal{R}e + \log 24 = \log(\dfrac{24}{\mathcal{R}e})$ donc $C_x = \dfrac{24}{\mathcal{R}e}$.

IV. **Simplification de l'équation de Navier-Stokes**

1. La force de pesanteur a pour norme $dF_g = \rho d\tau g$.

La force de viscosité a pour norme $dF_{vis} = \eta d\tau \Delta v = \eta d\tau \frac{d^2v}{dy^2}$ qui a pour ordre de grandeur $dF_{vis} = \eta d\tau \frac{v}{e^2}$.

On évalue le rapport $\frac{dF_g}{dF_{vis}} = \frac{\rho g d\tau}{\eta d\tau \frac{v}{e^2}} = \frac{\rho g e^2}{\eta v} = 2,6.10^{-3} << 1$. On peut donc négliger le poids devant la force de viscosité.

2. La force de pression a pour norme $dF_p = ||\overrightarrow{\text{gradP}}||d\tau = \frac{dP}{dx}d\tau = d\tau \frac{\Delta P}{L}$.

On évalue le rapport $\frac{dF_g}{dF_p} = \frac{\rho g d\tau}{d\tau \frac{\Delta P}{L}} = \frac{\rho g L}{\Delta P} = 5,5.10^{-4} << 1$. On peut donc négliger le poids devant la force de pression.

3. Dans l'équation de Navier Stokes on peut négliger le poids.

V. **Couche limite**

1. L'équation de Navier-Stokes s'écrit $\rho(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}) = \rho \overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}P + \eta \Delta \overrightarrow{v}$.

On a $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}} = v(y,t)\frac{\partial}{\partial x}$ d'où $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = v(y,t)\frac{\partial}{\partial x}(v(y,t)\overrightarrow{e_x}) = \overrightarrow{0}$

Le poids $\rho \overrightarrow{g}$ est négligé et le gradient de pression est nul.

On a donc après simplification $\rho \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \eta \Delta \overrightarrow{v}$.

On reconnaît une équation de diffusion de la forme $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\Delta \overrightarrow{v}$, on note $D = \frac{\eta}{\rho}$ le coefficient de diffusion.

2. Par analyse dimensionnelle $\frac{v}{t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{v}{y^2}$ soit $\frac{v}{\tau_{diff}} = \frac{\eta}{\rho}\frac{v}{\delta^2}$ donc $\tau_{diff} = \frac{\rho \delta^2}{\eta}$.

Par analyse dimensionnelle pour la convection on a $\tau_{conv} = \frac{\delta}{v}$.

On a donc $\frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} = \frac{\rho v \delta}{\eta}$: on retrouve le nombre de Reynolds.