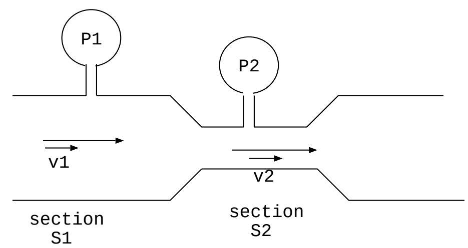
Evaluation de physique

I. Effet Venturi

Un débitmètre de Venturi est un dispositif qui permet de mesurer le débit d'un écoulement permanent incompressible dans une conduite. Il s'agit d'imposer un rétrécissement et de mesurer grâce à un manomètre différentiel la différence de pression entre deux prises de pression placées en amont et au coeur du resserrement de section.

On note v_1 et P_1, les vitesses et pression uniformes dans la zone de section S_1 qui précède le rétrécissement. On note v_2 et P_2, les vitesses et pression uniformes dans la zone de section S_2 dans le rétrécissement. On suppose que les hypothèses pour appliquer la relation de Bernoulli sont vérifiées (l'écoulement est rotationnel). On néglige l'effet de la pesanteur. On note ρ la masse volumique du fluide en écoulement.

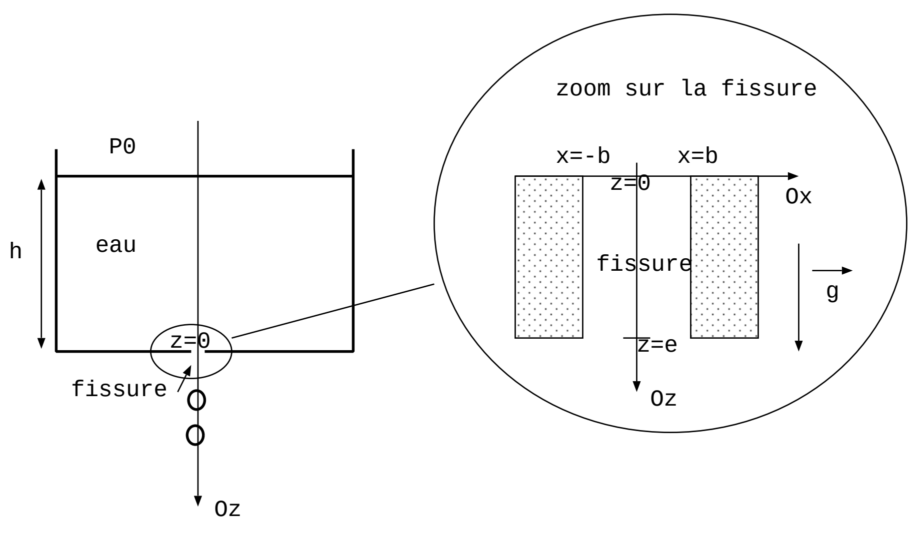


1. Tracer quelques lignes de courant dans le dispositif et en déduire le signe de $\Delta P = P_1 - P_2$.

2. Appliquer la relation de Bernoulli et la conservation du débit volumique pour en déduire l'expression du débit volumique en fonction de ρ, ΔP, S_1 et S_2.

II. Microfissure dans un réservoir

Une citerne est remplie d'eau sur une hauteur $h = 1\ m$ considérée constante. Le fond de la citerne, d'épaisseur $e = 2\ cm$ (selon Oz) comporte une fissure de longueur $a = 5\ cm$ (selon Oy) et de largeur $2b = 10\ \mu m$ (selon Ox). L'eau s'écoule par la fissure dans l'atmosphère à la pression $P_0 = 1,0\ bar$. L'écoulement est visqueux (de viscosité $\eta = 1,0.10^{-3}\ Pl$), permanent, homogène et incompressible de masse volumique ρ. L'axe Oz est vertical descendant, $z = 0$ correspond à l'altitude au fond de la citerne.



1. La fissure étant de très petite taille, on suppose que l'eau dans la citerne est à l'équilibre. Montrer que la pression dans la citerne vérifie la relation $\dfrac{dP}{dz} = +\rho g$. Préciser le sens physique de cette relation et en déduire la pression au fond de la citerne, soit $P(z = 0)$ en fonction de P_0, ρ, g et h.

2. On s'intéresse à l'écoulement dans la fissure où le point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). On note $P(x, z)$ et $\vec{v} = v(x)\vec{e_z}$ les champs de pression et de vitesse.

2.a. Vérifier que le champ de vitesse est compatible avec le fait que l'écoulement est incompressible.

2.b. Calculer l'accélération d'une particule fluide dans la fissure.

2.c. Ecrire l'équation de Navier-Stokes en négligeant le poids. En déduire que la pression ne dépend que de z et établir la relation entre $\frac{d^2v}{dx^2}$, η et $\frac{dP}{dz}$.

2.d. On rappelle que la relation $f(x) = g(z)$ où f est une fonction de la seule variable x et g est une fonction de la seule variable z, on en déduit que $f(x) = g(z) = K$ où K est une constante.

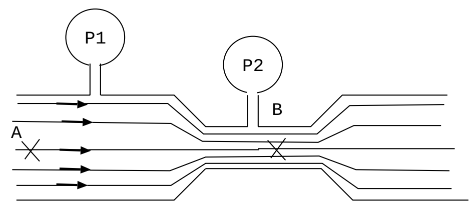
En déduire que l'on a $v(x) = \frac{K}{2\eta}(x^2 - b^2)$ avec $K = \frac{-\rho g h}{e}$.

3. Exprimer le débit volumique D_v à travers la fissure. En déduire l'expression de la vitesse moyenne.

4. Définir et calculer le nombre de Reynolds (on prendra pour la taille de l'obstacle, la largeur $2b$ de la fissure). Conclure sur la nature de l'écoulement.

III. Correction: effet Venturi

1. Dans le rétrécissement, les lignes de courant se rapprochent donc la vitesse augmente et la pression diminue ainsi $P_2 < P_1$ et $\Delta P = P_1 - P_2 > 0$.



2. Hypothèses: écoulement incompressible et stationnaire, fluide parfait, pas de pièce mobile, on peut appliquer la relation de Bernoulli sur la ligne de courant AB: $\frac{\rho v_A^2}{2} + P_A = \frac{\rho v_B^2}{2} + P_B$ soit $\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2$
La relation du débit volumique s'écrit $D_v = v_1 S_1 = v_2 S_2$ soit en remplaçant dans la relation de Bernoulli: $\frac{\rho D_v^2}{2S_1^2} + P_1 = \frac{\rho D_v^2}{2S_2^2} + P_2$ d'où $\frac{\rho D_v^2}{2}(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}) = P_1 - P_2 = \Delta P$ d'où $D_v = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$.

IV. Correction: microfissure dans une citerne

1. Une particule fluide de volume $d\tau$ dans le référentiel d'étude supposé galiléen est à l'équilibre sous l'action de son poids $d\overrightarrow{P} = \rho d\tau g \overrightarrow{e_z}$ et de la résultante des forces de pression $d\overrightarrow{F_p} = -\overrightarrow{grad} P d\tau = -(\frac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e_z})d\tau$.

A l'équilibre on a $d\overrightarrow{P} + d\overrightarrow{F_P} = \overrightarrow{0}$.

En projection sur Ox et Oy on obtient $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ soit P ne dépend ni de x, ni de y.

En projection sur Oz, on obtient $\frac{dP}{dz} = \rho g > 0$: cette relation traduit que la fonction $P(z)$ est croissante soit que la pression augmente quand on descend.

On primitive $P(z) = \rho g z + A$. On trouve A avec les conditions aux limites soit $P(z = -h) = P_0$ d'où $P(z) = \rho g(z + h) + P_0$. On a donc $P(z = 0) = P_0 + \rho g h$.

Remarque: dans le réservoir, sur la surface du haut, la pression vaut P_0 puis la pression augmente quand on descend soit $\frac{dP}{dz} > 0$. (c'est de la statique car le fluide est quasi immobile) et dans la fissure, la pression en $z = 0$ vaut $P_0 + \rho g h$ et la pression en $z = e$ est P_0, donc dans la fissure, la pression diminue quand on descend: $\frac{dP}{dz} < 0$.

2. **2.a.** Pour un écoulement incompressible on doit avoir $div(\overrightarrow{v}) = 0$.

Or on a $div(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{v} = \frac{\partial v(x)}{\partial z} = 0$: le champ de vitesse est bine compatible avec un écoulement incompressible.

2.b. L'accélération d'une particule fluide s'écrit $\overrightarrow{a} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} + v(x)\frac{\partial}{\partial z}(v(x)\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$: les particules fluides ont un mouvement rectiligne uniforme.

2.c. On écrit l'équation de Navier Stokes: $\rho(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v}) = \rho\overrightarrow{g} - \overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\overrightarrow{v}$

avec $\Delta\overrightarrow{v} = \dfrac{d^2v(x)}{dx^2}\overrightarrow{e_z}$

avec $\overrightarrow{grad}P = \dfrac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

avec $\rho\overrightarrow{g} = \rho g\overrightarrow{e_z}$

On projette sur Ox: $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$ signifie que la pression ne dépend pas de x.

On projette sur Oz: $-\dfrac{dP}{dz} + \eta\dfrac{d^2v}{dx^2} = 0$ d'où $\eta\dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{dP}{dz}$.

2.d. $\eta\dfrac{d^2v}{dx^2}$ est une fonction de x et $\dfrac{dP}{dz}$ est une fonction de z, ces deux fonctions sont égales donc elles sont égales à une même constante. On a donc $\eta\dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{dP}{dz} = K$.

Ainsi $\dfrac{dP}{dz} = K = \dfrac{P(z=0) - P(z=e)}{0-e} = \dfrac{P_0 + \rho gh - P_0}{-e} = -\dfrac{\rho gh}{e}$.

Ainsi $\dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{K}{\eta}$, on primitive deux fois par rapport à x: $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{Kx}{\eta} + A$ et $v(x) = \dfrac{Kx^2}{2\eta} + Ax + B$. Le fluide visqueux adhère aux parois soit $v(x=-b) = \dfrac{Kb^2}{2\eta} - Ab + B = 0$ et $v(x=+b) = \dfrac{Kb^2}{2\eta} + Ab + B = 0$.

On fait la somme des deux équations $\dfrac{Kb^2}{\eta} + 2B = 0$ soit $B = -\dfrac{Kb^2}{2\eta}$.

On fait la différence des deux équations $2A = 0$.

On a donc $v(x) = \dfrac{K}{2\eta}(x - b^2)$.

On trouve la valeur de K en utilisant $\dfrac{dP}{dz} = K = \dfrac{P(z=0) - P(z=e)}{0-e} = \dfrac{P_0 + \rho gh - P_0}{-e} = -\dfrac{\rho gh}{e}$.

On a $K < 0$, donc la vitesse $v(x) = \dfrac{K}{2\eta}(x - b^2)$ pour $-b \leq x \leq +b$ est bien positive selon Oz.

3. On calcule le débit volumique dans la fissure à travers la surface perpendiculaire à al vitesse donc perpendiculaire à Oz, on a donc $dS = dxdy$.

Ainsi $D_v = \iint v(x)dxdy = \int_{-b}^{+b} \dfrac{K}{2\eta}(x^2 - b)dx \int_0^a dy = 2a\int_0^{+b} \dfrac{K}{2\eta}(x^2 - b^2)dx = 2a\dfrac{K}{2\eta}[\dfrac{x^3}{3} - b^2x]_0^b = -\dfrac{2Kab^3}{3\eta} = \dfrac{2\rho ghab^3}{3\eta e}$.

On en déduit la vitesse moyenne $D_v = v_{moy}a2b = \dfrac{2\rho ghab^3}{3\eta e}$ soit $v_{moy} = \dfrac{\rho ghb^2}{3\eta e}$. AN: $v = 4,0\ mm.s^{-1}$.

4. Le nombre de Reynolds est le rapport du terme convectif sur le terme diffusif soit $Re = \dfrac{||\rho(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v}||}{||\eta\Delta\overrightarrow{v}||} = \dfrac{\rho vL}{\eta}$.

$Re = \dfrac{10^3.4.10^{-3}10.10^{-6}}{10^{-3}} = 0,04$: dans cet écoulement les effets diffusifs l'emportent sur les effets convectifs, l'écoulement est laminaire.