Chap OM1: ondes dans les solides déformables

Dans ce chapitre on étudie les ondes dans les solides, pour cela on cherche à établir l'équation de propagation vérifiée par la perturbation notée $s(x,t)$.

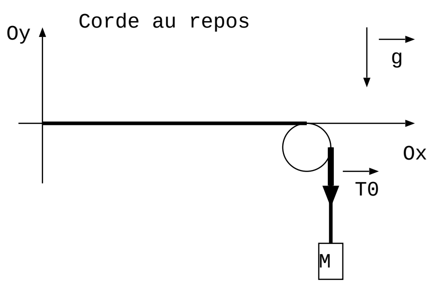
Qu'est-ce que l'équation de propagation?

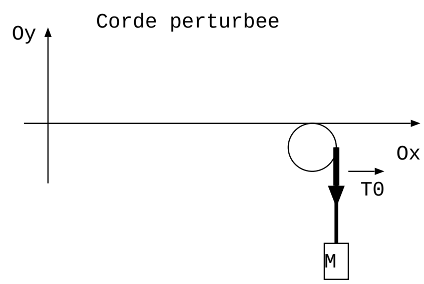
Comment trouve-t-on l'équation de propagation d'ondes mécaniques?

I. Exemple 1: Ondes transversales sur une corde vibrante

1. Le dispositif

Soit une corde sans raideur (elle n'est donc pas élastique), inextensible, de masse linéique μ, de longueur L, tendue sous l'action de la force de tension $\overrightarrow{T_0}$. Au repos, la corde se confond avec l'axe Ox.





2. Les hypothèses

• On néglige l'action du poids sur la corde

• Les phénomènes dissipatifs sont négligés

• Hypothèses des petits mouvements:

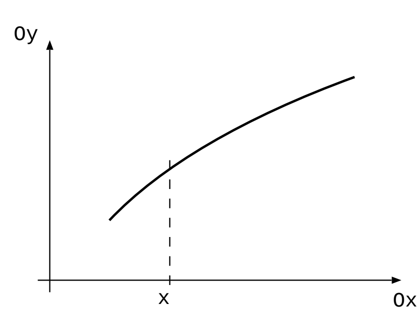
- Le déplacement d'un point matériel de la corde est supposé vertical, soit un point de la corde de coordonnées $(x,0)$ au repos se retrouve en $(x, y(x,t))$ lors de la vibration de la corde: l'onde est dite

- Les déformations de la cordes sont suffisamment faibles que l'on puisse supposer que l'angle $\alpha(x,t)$, que fait la corde avec l'horizontale, est un infiniment petit du premier ordre.

Notations:

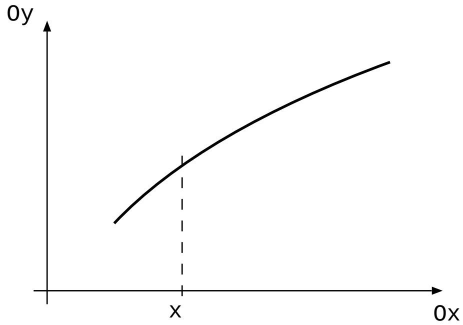
On note $\overrightarrow{T_g}(x,t)$ la tension exercée sur la corde en x à l'instant t par la corde qui se situe à gauche de x.

On note $\overrightarrow{T_d}(x,t)$ la tension exercée sur la corde en x à l'instant t par la corde qui se situe à droite de x.



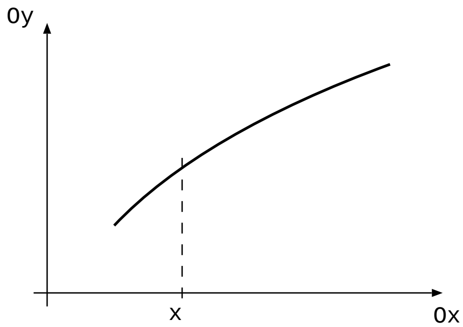
3. Relation entre $\alpha(x,t)$ et $y(x,t)$

On considère le tronçon de corde compris entre x et $x + dx$ à l'instant t.



4. Equation de propagation

On appelle équation de propagation, l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $y(x,t)$. On la trouve en appliquant la RFD au tronçon de corde compris entre x et $x + dx$ à l'instant t. Ce tronçon a pour longueur au repos .... et pour masse ....



.

Remarque 1: homogénéité:

Remarque 2: les ondes sur la corde vont d'autant plus vite que

Remarque 3: attention de ne pas confondre:

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

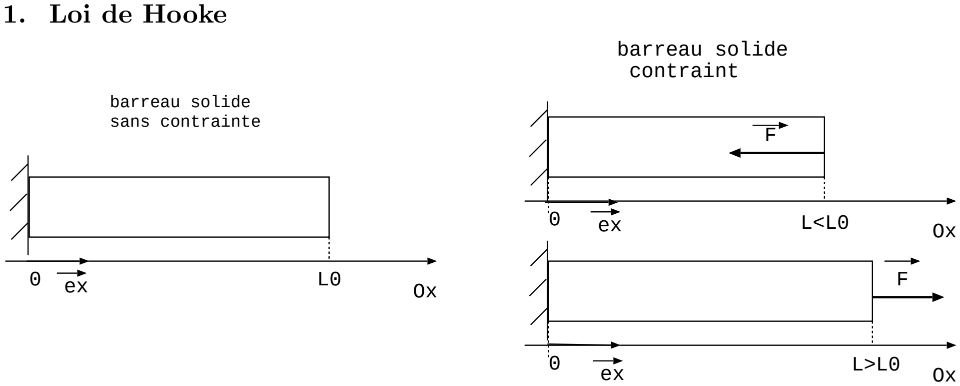
$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

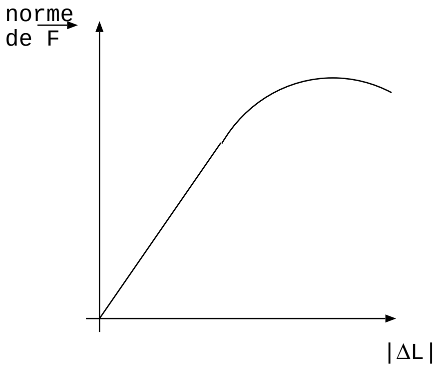
Ordre de grandeur: calculer c pour une corde de piano cylindrique, en acier de masse volumique $\rho = 7200\ kg/m^3$, de rayon $r = 1\ mm$ et tendue sous $T = 3000\ N$.

II. **Exemple 2: Ondes longitudinales dans les solides**

Les ondes se propagent dans les solides grâce aux compressions et dilatations infinitésimales des tranches de solide. Les forces exercées sur un solide pour le comprimer ou l'étirer font appel à la loi de Hooke.

1. Loi de Hooke



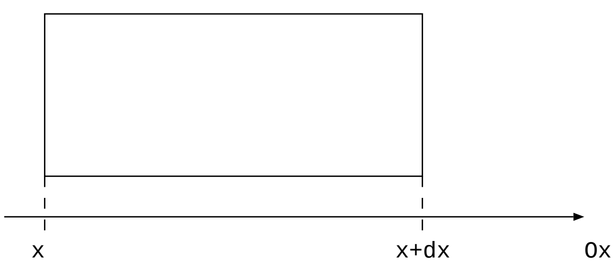


2. Approche mésoscopique des ondes dans un solide

Le dispositif et les notations

On étudie la propagation d'ondes selon Ox dans un solide de masse volumique ρ et de module d'Young E. On note $u(x,t)$ le déplacement à l'instant t du solide en placé en x au repos. On note $\overrightarrow{F_d}(x,t)$, la force exercée sur la surface S de solide en x à l'instant t par le solide à sa droite. La force suit la loi de Hooke: $\overrightarrow{F_d}(x,t) = ES\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\overrightarrow{e_x}$.

Interprétation de la force: on s'appuie sur le tronçon de solide de section S située entre x et $x + dx$ au repos



Longueur au repos:

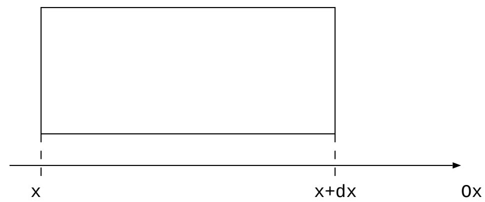
Longueur en présence de l'onde:

Allongement:

Allongement relatif:

L'équation de propagation

On appelle équation de propagation, l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $u(x,t)$. On la trouve en appliquant la RFD au tronçon de solide de section S compris entre x et $x + dx$. Ce tronçon a pour longueur au repos .... et pour masse .... On néglige le poids.



.

Remarque 1: homogénéité:

Remarque 2: les ondes dans le solide vont d'autant plus vite que

Remarque 3: attention de ne pas confondre:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Ordre de grandeur:

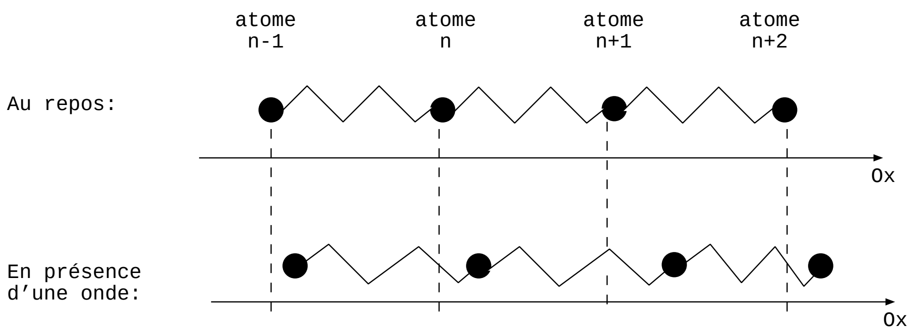
3. Approche microscopique des ondes dans un solide

Le dispositif et les notations

On modélise un solide par des chaînes linéaires d'atomes identiques de masse m reliés entre eux par des ressorts de constante de raideur k et de longueur à vide a (a représente la distance à l'équilibre entre deux atomes voisins).

On étudie une chaîne d'atomes selon Ox.

On note na la position à l'équilibre de l'atome n et $u_n(t)$, le déplacement de l'atome n à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre.

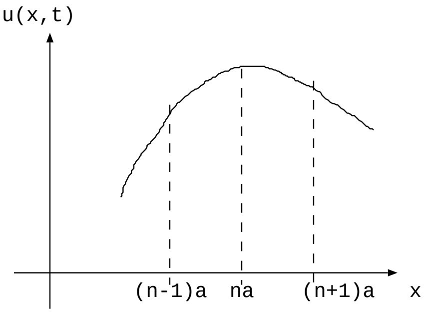


L'équation de propagation

On applique la RFD à l'atome n.

Le modèle précédent fait appel aux fonctions discrètes $u_{n-1}(t)$, $U_n(t)$, $u_{n+1}(t)$... Le déplacement $u(t)$ n'est défini que sur un atome. On cherche à passer à une description continue en introduisant une fonction $u(x,t)$ qui caractérise le déplacement à l'instant t de l'atome dont la position d'équilibre est x.

La fonction $u(x,t)$ en réalité n'est définie qu'aux valeurs de x où se trouvent des atomes. Mais comme la distance entre deux atomes est très petites (de l'ordre de 100 pm), on fabrique par continuité mathématique la fonction $u(x,t)$.



$u(x = (n-1)a, t) =$

$u(x = na, t) =$

$u(x = (n+1)a, t) =$

La RFD appliquée à l'atome n a permis de trouver la relation: $m\dfrac{d^2u_n}{dt^2} = k(u_{n+1} - u_n + u_{n-1} - u_n)$. En remplaçant par $u(x,t)$ on obtient:

Remarque 1: homogénéité:

Remarque 2: les ondes dans le solide vont d'autant plus vite que

Remarque 3: attention de ne pas confondre:

$c = \sqrt{\dfrac{ka^2}{m}}$

$\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$

4. Lien entre les deux approches: mésoscopique et microscopique