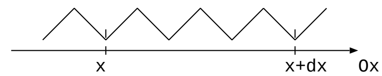
TD 1 ondes mécaniques

I. Ondes le long d'un ressort

Dans cet exercice, on étudie les ondes qui se propagent sur un ressort à spires non jointives. On note m_0 la masse du ressort, l_0 sa longueur à vide et k_0 sa constante de raideur. On définit la masse linéique du ressort par $\mu = \dfrac{m_0}{l_0}$.

1. Le ressort est vertical, il est accroché au plafond et on suspend à ce ressort une masse $m = 20\ g$, le ressort s'allonge alors de $5,0\ cm$. Calculer sa constante de raideur k_0.

Le ressort est posé sur un plan horizontal. On considère la portion de ressort comprise entre x et $x+dx$.



On note $\xi(x,t)$, le déplacement à l'instant t du point du ressort d'abscisse x et $\xi(x+dx,t)$, le déplacement à l'instant t du point du ressort d'abscisse $x+dx$.

On note $\overrightarrow{F_d}(x,t) = k_0 l_0 \dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)\overrightarrow{e_x}$, la force exercée en x par la portion de ressort à droite de x.

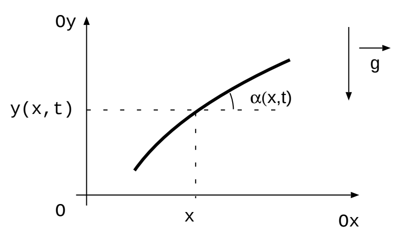
2. Représenter la tranche de ressort comprise entre x et $x+dx$ au repos. Représenter cette même tranche à l'instant t quelconque en faisant figurer les grandeurs $\xi(x,t)$ et $\xi(x+dx,t)$. Montrer que l'allongement relatif du ressort s'écrit $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)$. C'est ce terme que nous trouvons dans l'expression de la force.

3. Montrer, en appliquant la RFD à la tranche de ressort comprise au repos entre x et $x+dx$, que $\xi(x,t)$ vérifie l'équation: $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$. Exprimer c en fonction de k_0, l_0 et m_0. Vérifier l'unité de c. AN: calculer c pour un ressort de masse $m_0 = 180\ g$, de longueur à vide $l_0 = 1,0\ m$.

Réponses: 1- $k_0 = 4,0\ N.m^{-1}$ *3-* $c = \sqrt{\dfrac{k_0 l_0^2}{m}}$

II. Ondes sur une corde

Soit une corde de masse linéique μ tendue par la force de norme T_0. Au repos la corde est rectiligne et confondue avec l'axe horizontal Ox. On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x,t)$ le déplacement du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t. L'axe Oy est l'axe vertical ascendant.



On fait les hypothèses suivantes : les déplacements sont petits, de même que l'angle que fait la corde avec l'axe Ox et on ne garde que les termes du premier ordre en $y(x,t)$ et en ses dérivées.

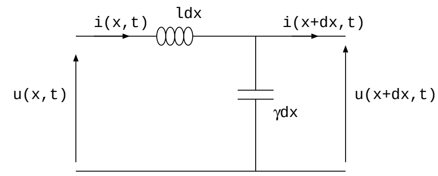
1. On considère l'élément de corde situé entre x et $x+dx$. Appliquer la RFD à cet élément en tenant compte du poids de la corde. En déduire que la force de tension est de norme constante et montrer que l'équation de propagation vérifiée par $y(x,t)$ s'écrit: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \dfrac{g}{c^2} = 0$.

2. Dans cette question, on fait l'hypothèse selon laquelle le poids est négligeable et on tient compte de la raideur de la corde qui se manifeste par une force supplémentaire donnée par: $\overrightarrow{F_g}(x,t) = \gamma \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x,t)\overrightarrow{e_y}$: c'est la force exercée en $x(t)$ par le bout de corde à gauche de x sur le bout de corde à droite de x. Comment s'écrit la force exercée par le bout de corde à droite sur le bout de corde à gauche de $x+dx$? Montrer que la tension de la corde est uniforme et que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $y(x,t)$ s'écrit: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \dfrac{\gamma}{T_0}\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$.

On propose une solution de la forme $\underline{y}(x,t) = y_0 e^{j(\omega t - kx)}$. De quel type d'onde s'agit-il? Exprimer ω en fonction de k, c, T_0 et γ.

Réponses: 2- $\omega = kc\sqrt{1 + \dfrac{k^2\gamma}{T_0}}$

III. **Propagation dans un câble coaxial**



Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $l.dx$ et d'une capacité $\gamma.dx$.

1. Déduire de l'application d'une loi des noeuds et d'une loi des mailles que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ vérifient les équations différentielles $\dfrac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -\gamma\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -l\dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t)$.

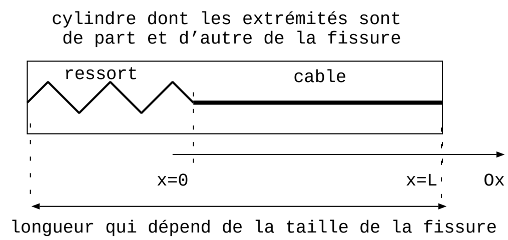
2. Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ sont solutions d'une équation de d'Alembert (indication : pour toute fonction $y(x,t)$ on a $\dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial y}{\partial x}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial y}{\partial t})$). Quelle est la vitesse de propagation des ondes ? Vérifier l'homogénéité du résultat.

3. Une onde de la forme $u(x,t) = u_0\cos(\omega t - kx)$ se propage dans le câble. En remplaçant $u(x,t)$ dans l'équation d'onde trouvée précédemment déterminer la relation entre k et ω. Donner l'expression de $i(x,t)$ en utilisant une des équations obtenues dans la question 1.

Réponses : 2- $c = \dfrac{1}{\sqrt{l\gamma}}$ *3- relation de dispersion* $k = \dfrac{\omega}{c}$ *et* $i(x,t) = \sqrt{\dfrac{\gamma}{l}}u_0\cos(\omega t - kx)$

IV. **Fissuromètre**

Pour déceler une légère modification de la largeur d'une fissure, une technique consiste à utiliser un capteur fixé de part et d'autre de la fissure. Ce capteur est composé d'un ressort, d'un câble en série et d'un détecteur. Le tout est situé à l'intérieur d'un cylindre protecteur.



On assimile le câble à une corde inextensible sans raideur, de longueur constant L et de masse linéique μ, tendu par un ressort de raideur $k = 102\ N.m^{-1}$. Le ressort est étiré et exerce sur le câble une force de tension de norme T_0. La câble est fixé en $x = 0$ et $x = L$. On étudie les vibrations transversales de ce câble dans la direction Oy.

1. Le câble en acier de masse volumique $\rho = 8000\ kg.m^{-3}$ a une longueur de $0,50\ m$ et un rayon de $2,00\ mm$. Calculer sa masse linéique.

2. Calculer la tension T_0 sachant que le ressort est étiré d'une longueur $\Delta = 1,5\ cm$.

3. Donner (sans la démontrer) l'équation de propagation que vérifie l'élongation $y(x,t)$ sur le câble, en précisant l'expression de la célérité c des ondes. On cherche une solution $y(x,t) = f(x)\sin(\omega t)$. Déterminer l'équation vérifiée par $f(x)$ puis la forme générale de la solution en tenant compte des conditions aux limites du câble fixé en $x = 0$ et $x = L$. En déduire l'expression des fréquences propres.

Calculer la fréquence du fondamental.

4. Par suite d'un mouvement de terrain la largeur de la fissure augmente d'une distance d, la longueur de la corde étant constante. Déterminer la variation de la fréquence propre fondamentale due à cette variation. Si on veut détecter une variation de largeur de fissure $d = 0,1\ mm$, donner la valeur de la précision du détecteur de fréquence.

Réponses: 1- $\mu = 0,10\ kg.m^{-1}$ *2-* $T_0 = 1,53\ N$ *3-* $f''(x) + \dfrac{\omega^2}{c^2}f(x) = 0$ *soit* $f(x) = A\sin(\frac{\omega x}{c})$ *et* $f_n = \dfrac{nc}{2L}$

V. **Guitare**

Calculer la tension à appliquer à une corde de guitare, de longueur $L = 62,0\ cm$ (fixe à ses deux extrémités), pour l'accorder sur le sol_2 de fréquence 196 Hz. Cette corde en acier a un diamètre $d = 0,86\ mm$ et une masse volumique $\rho = 7800\ kg.m^{-3}$. *Réponse:* $T = 268\ N$

Sans changer sa tension, quelle longueur faut-il donner à la corde pour jouer un sol_3 dont la fréquence est double de celle du sol_2? On admet que la fréquence émise correspond au mode propre de rang 1 appelé mode fondamental.