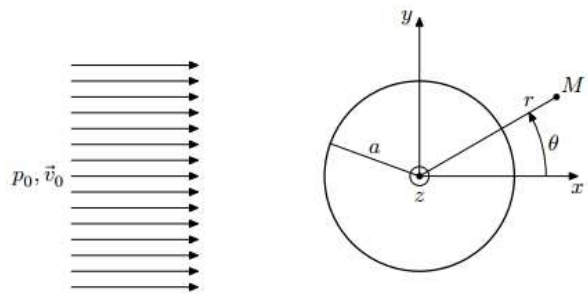
DM 5 de physique

I. **Ecoulement de l'air autour du buste du cycliste**

On modélise l'écoulement de l'air autour du buste du cycliste par un écoulement d'air autour d'un cylindre, de rayon a, de hauteur infinie et d'axe (Oz) perpendiculaire au plan de l'écoulement. Le problème est invariant par translation suivant (Oz) et l'écoulement est partout supposé stationnaire, incompressible, homogène, parfait (sans viscosité) et irrotationnel. L'action de la pesanteur est négligée. On note respectivement $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$ et P_0, la vitesse et la pression loin en amont du cylindre. Au voisinage du cylindre, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz), le champ des vitesses est de la forme $\overrightarrow{v} = v_r(r,\theta)\overrightarrow{e_r} + v_\theta(r,\theta)\overrightarrow{e_\theta}$ et la pression est notée P.



1. Définir les notions d'écoulement stationnaire, incompressible et irrotationnel.

2. Montrer qu'il existe un potentiel des vitesses ϕ vérifiant l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$.

3. Pour l'écoulement uniforme, loin en amont, montrer que le potentiel des vitesses ϕ associé peut être pris de la forme $\phi = v_0 x$. Donner alors la forme des surfaces équipotentielles et des lignes de courant.

On admet que le potentiel des vitesses du problème est donné par $\phi(M) = \gamma r(1 + \frac{a^2}{r^2})\cos\theta$ où r et θ sont les coordonnées polaires d'axe (Oz) et γ une constante positive.

4. Déduire de la question précédente, l'expression de γ.

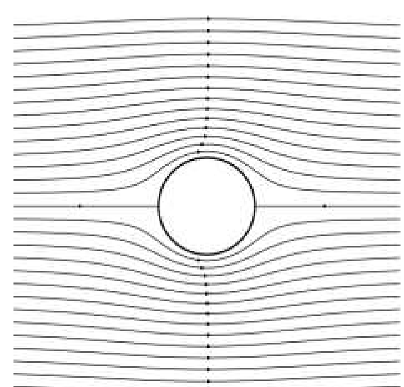
5. Déterminer les composantes polaires v_r et v_θ du champ de vitesses $\overrightarrow{v}$ en fonction de v_0, r, a et θ. On donne: $\overrightarrow{grad}\ a = \frac{\partial a}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial a}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$.

6. Montrer que les conditions aux limites à la surface du cylindre sont vérifiées.

7. Montrer, à partir de l'équation de Navier-Stokes et en précisant clairement les hypothèses utilisées, que la quantité $P + \frac{\rho v^2}{2}$ est constante et uniforme dans tout l'écoulement. On donne $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{grad}(\frac{v^2}{2}) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{v}$.

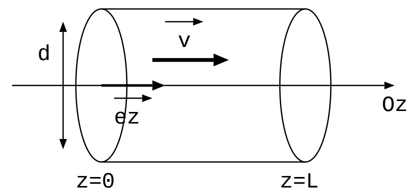
8. À partir de l'expression de ϕ, un programme Python a permis de tracer la représentation des lignes de courant.

En s'appuyant sur le tracé des lignes de courant données, décrire comment évolue la pression dans l'écoulement au voisinage de la surface du cylindre pour $\theta = 0$, $\theta = \pm\pi/2$ et $\theta = \pi$. Comparer $P(r \approx a, \theta = \pm\pi/2)$ à P_0. Comparer de même $P(r \approx a, \theta = 0\ ou\ \pi)$ à P_0.



II. **Écoulement dans un vaisseau sanguin**

On s'intéresse à l'écoulement horizontal du sang dans un seul vaisseau sanguin qu'on assimile à une conduite cylindrique indéformable de diamètre d et de longueur L. Le sang est un fluide incompressible de masse volumique $\rho_s = 1060\ kg.m^{-3}$. Le sang est un fluide newtonien de viscosité dynamique égale à $\eta_s = 1,6.10^{-3}$. L'écoulement du sang est stationnaire.



Le gradient de pression est uniforme le long de la conduite et on note $\Delta P = P(z=0) - P(z=L) > 0$ la différence de pression entre le début et la fin du vaisseau sanguin considéré. Le champ des vitesses est de la forme $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{e_z}$ en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) et $P = P(z)$.

Formulaire mathématique:

Laplacien en coordonnées cylindriques: $\Delta v(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dv}{dr})$.

l'égalité $f(z) = g(r)$ implique que les fonctions sont constantes soit $f(z) = g(r) = K$ une constante.

Le gradient en coordonnées cylindriques: $\overrightarrow{grad}\ a = \frac{\partial a}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial a}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$.

1. Montrer que l'accélération d'une particule fluide est nulle.

2. Déduire de l'équation de Navier-Stokes que la vitesse s'écrit $\overrightarrow{v} = \frac{\Delta P}{4\eta_s L}(\frac{d^2}{4} - r^2)\overrightarrow{e_z}$.

Représenter le champ des vitesses dans une section droite de conduite.

3. En déduire l'expression du débit volumique D_v en fonction des données de l'énoncé.

4. Par analogie avec l'électricité justifier que l'on peut définir la résistance hydraulique R_H de sorte que $\Delta P = R_H D_v$. Montrer que la résistance hydraulique s'exprime sous la forme: $R_H = \frac{128\eta_s L}{\pi d^4}$: cette expression constitue la loi de Poiseuille.

On se propose de calculer la perte de charge (diminution de pression à la traversée des artérioles) due aux artérioles afin d'effectuer une comparaison avec les données réelles. On supposera que la loi de Poiseuille peut s'appliquer dans tous les vaisseaux sanguins.

5. A partir du tableau 1, déterminer le débit volumique du sang dans l'aorte D_v.

Justifier ensuite que le nombre d'artérioles dans le corps humain vaut environ $N = 1,5.10^6$.

6. En prenant $D_v = 5\ L.min^{-1}$, estimer les pertes de charge $\Delta P_{arterioles}$ dans les artérioles. Comparer cette valeur à celle pouvant être déterminée à partir du tableau 1. Vérifier la cohérence.

III. **Ecoulement autour d'un cycliste (extrait centrale PC 2022)**

1. Dans un écoulement stationnaire, toutes les grandeurs physiques sont indépendantes du temps.

Dans un écoulement incompressible, les particules fluides ont la même masse volumique au cours du temps, elles ne subissent pas de dilatation, ni de compression.

Dans un écoulement irrotationnel, les particules fluides ne tournent pas sur elles-mêmes.

2. L'écoulement est incompressible donc on a $div\overrightarrow{v} = 0$.

L'écoulement est irrotationnel donc on a $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Or $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}a) = \overrightarrow{0}$ pour tout champ scalaire a, on en déduit qu'il existe une fonction ϕ telle que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{grad}\phi$. ϕ s'appelle le potentiel des vitesses.

Ainsi on a $div\overrightarrow{v} = div(\overrightarrow{grad}\phi) = \Delta\phi = 0$.

3. Loin du cylindre on a $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{grad}\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$.

En projetant on obtient $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = 0$ donc ϕ ne dépend pas de y ni de z.

On a aussi $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = v_0$ donc $\phi = v_0x + A$. On peut prendre $A = 0$.

Les surfaces équipotentielles sont telles que ϕ est constante soit x est constante: ce sont des plans.

Les lignes de courant sont des droites selon Ox.

Ainsi on constate que les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de courant.

4. On utilise l'expression donnée de ϕ loin du cylindre soit pour $r \to \infty$. On a donc $\phi = v_0x = \gamma r\cos\theta$. Or en coordonnées cylindriques on a $x = r\cos\theta$ soit $\gamma = v_0$.

5. On applique $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{grad}\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$ soit:

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \gamma(1 + \frac{a^2}{r^2})\cos\theta + \gamma r(\frac{-2a^2}{r^3})\cos\theta = v_0(1 - \frac{a^2}{r^2})\cos\theta$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -v_0(1 + \frac{a^2}{r^2})\sin\theta.$$

6. A la surface du cylindre, le fluide parfait glisse sur la surface donc la vitesse normale est nulle soit $v_r(r = a) = 0$: c'est bien ce que l'on a.

7. L'équation de Navier Stokes s'écrit $\rho(\dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v}) = \rho\overrightarrow{g} - \overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\overrightarrow{v}$.

On a $\dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$ car l'écoulement est stationnaire.

On a $\rho\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$ car on néglige le poids.

On a $\eta\Delta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ car le fluide est parfait.

On a aussi $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{grad}(\dfrac{v^2}{2}) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{grad}(\dfrac{v^2}{2})$ car l'écoulement est irrotationnel.

Il reste donc $\overrightarrow{grad}(\dfrac{v^2}{2}) + \overrightarrow{grad}P = \overrightarrow{grad}(\dfrac{v^2}{2} + P) = \overrightarrow{0}$ soit $\dfrac{v^2}{2} + P$ est une constante dans tout le fluide.

8. Pour $\theta = \pi$ et $\theta = 0$, les lignes de courant sont éloignées les unes des autres, ce qui veut dire que la vitesse diminue et donc comme $\dfrac{v^2}{2} + P$ est une constante, cela signifie que la pression augmente. On a donc $P > P_0$.

Pour $\theta = \pm\pi/2$, les lignes de courant sont proches les unes des autres, ce qui veut dire que la vitesse augmente et donc comme $\dfrac{v^2}{2} + P$ est une constante, cela signifie que la pression diminue. On a donc $P < P_0$.

IV. **Ecoulement dans un vaisseau sanguin**

1. L'accélération d'une particule fluide est $\overrightarrow{a} = \dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} + v(r)\dfrac{d}{dz}(v(r)\overrightarrow{e_z}) = \overrightarrow{0}$: les particules fluides ont un mouvement rectiligne uniforme.

2. L'équation de Navier Stokes s'écrit $\rho_s(\dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v}) = \rho\overrightarrow{g} + \eta_s\Delta\overrightarrow{v} - \overrightarrow{grad}P$

On a $\Delta\overrightarrow{v} = \Delta v(r)\overrightarrow{e_z} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv}{dr})\overrightarrow{e_z}$.

On a $\overrightarrow{grad}P = \dfrac{dP}{dz}\overrightarrow{e_z}$

On néglige le poids.

On projette sur Oz: $\dfrac{\eta_s}{r}\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv}{dr}) - \dfrac{dP}{dz} = 0$ ou encore $\dfrac{\eta}{r}\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv}{dr}) = \dfrac{dP}{dz}$.

On en déduit que $\dfrac{\eta_s}{r}\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv}{dr}) = \dfrac{dP}{dz} = K$ une constante.

On calcule K en utilisant la relation $\dfrac{dP}{dz} = K$ soit $P(z) = Kz + A$ avec pour conditions aux limites $\Delta P = P(z=0) - P(z=L) = A - (KL + A) = -KL$ soit $K = \dfrac{-\Delta P}{L}$.

On a aussi $\dfrac{\eta_s}{r}\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv}{dr}) = K$ soit $\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv}{dr}) = \dfrac{Kr}{\eta_s}$.

On primitive: $r\dfrac{dv}{dr} = \dfrac{Kr^2}{2\eta_s} + B$ ou encore $\dfrac{dv}{dr} = \dfrac{Kr}{2\eta} + \dfrac{B}{r}$

On primitive: $v(r) = \dfrac{Kr^2}{4\eta_s} + B\ln + C$.

Cette vitesse doit être définie pour $0 \leq r \leq d/2$, or $B\ln r$ diverge quand r tend vers zéro donc on doit prendre $B = 0$.

Le fluide visqueux adhère aux parois donc $v(r = d/2) = 0 = \dfrac{Kd^2}{16\eta_s} + C$ soit $C = -\dfrac{Kd^2}{16\eta_s}$ avec $K = \dfrac{-\Delta P}{L}$.

La vitesse s'écrit donc $v(r) = \dfrac{\Delta P}{4\eta_s L}(\dfrac{d^2}{4} - r^2)$.

3. La vitesse n'est pas uniforme donc on calcule le débit en utilisant $D_v = \iint v(r)dS$. On intègre sur la surface perpendiculaire à la vitesse donc sur un disque où M est repéré par r et θ. On a donc $dS = drrd\theta$.

Soit $D_v = \iint \dfrac{\Delta P}{4\eta_s L}(\dfrac{d^2}{4} - r^2)rdrd\theta$

et $D_v = \dfrac{\Delta P}{4\eta_s L}\int_0^{d/2}(\dfrac{d^2 r}{4} - r^3)dr\int_0^{2\pi}d\theta = \dfrac{\Delta P}{4\eta_s L}(\dfrac{d^2(d/2)^2}{8} - \dfrac{(d/2)^4}{4})2\pi = \dfrac{\Delta P\pi d^4}{128\eta_s L}$.

4. La loi d'Ohm s'écrit $u = V_1 - V_2 = Ri$ où U est la différence de potentiel qui met en mouvement les charges et i est le débit des charges.

Par analogie on écrit $\Delta P = P_1 - P_2 = R_h D_v$ où ΔP est la différence de pression qui met en mouvement le fluide.

On a donc $R_h = \dfrac{\Delta P}{D_v} = \dfrac{128\eta_s L}{\pi d^4}$.

5. Le débit volumique dans l'aorte s'écrit $D_v = v\pi(d/2)^2 = 2,65.10^{-1}\pi(\dfrac{20.10^{-3}}{2})^2 = 8,3.10^{-5}\ m^3.s^{-1}$.

Le débit volumique dans une artériole s'écrit $D'_v = v'\pi(d'/2)^2 = 2,80.10^{-2}\pi(\dfrac{0,05.10^{-3}}{2})^2 = 5,5.10^{-11}\ m^3.s^{-1}$.

L'équivalent de l'intensité en mécanique des fluides est le débit. La loi des noeuds en mécanique des fluides s'écrit don $D_v = ND'_v$ soit $N = \dfrac{D_v}{D'_v} = 1,5.10^6$.

6. Le débit volumique donnée pour une artériole est $D_v = 5\ L.min^{-1} = \frac{5.10^{-3}}{60}\ m^3.s^{-1} = 8,3.10^{-5}\ m^3.s^{-1}$.

On calcule la résistance hydraulique pour une artériole: $R_H = \dfrac{128\eta_s L}{\pi d^4} = \dfrac{128.1,6.10^{-3}.10.10^{-3}}{\pi(0,05.10^{-3})^4} = 6,95.10^7\ SI$ et $\Delta P = R_H D_v = 5,8.10^3\ Pa$.

La pression dans les artères est 95 $mmHg$ et la pression dans les capillaires est 30 $mmHg$ donc $\Delta P = 95 - 30 = 65\ mmHg$. On convertit en Pascal en écrivant que 760 $mmHg$ est égal à $10^5\ Pa$. On trouve $\Delta P = \frac{65.10^5}{760} = 8,5.10^3\ Pa$: c'est bien du même ordre de grandeur.