

# DS 5 de physique

Le sujet comprend quatre exercices indépendants à traiter dans l'ordre de votre choix. La feuille d'annexe est à rendre avec la copie. Il est demandé de numérotter les pages au format  $i/N$  où  $i$  est le numéro de la page et  $N$  le nombre de pages.

Il est demandé un effort de présentation (tirer un trait entre chaque question et encadrer les résultats) et de rédaction (prendre soin de nommer les lois utilisées, les hypothèses pour les appliquer et expliquer clairement).

## I. Onde sur une corde vibrante

On modélise une corde de guitare par une fine corde homogène, inextensible, de masse linéique  $\mu$ , de longueur  $L$ , tendue horizontalement sous la tension  $T_0$ . La corde est fixée en  $x = 0$  et  $x = L$ . On se place dans le cadre des hypothèses suivantes:

- ( $H_1$ ) l'action du champ de pesanteur est négligée
- ( $H_2$ ) les phénomènes dissipatifs sont négligés
- ( $H_3$ ) le déplacement d'un point matériel de la corde est strictement vertical
- ( $H_4$ ) les déformations que fait la corde avec l'horizontale sont suffisamment faibles pour que l'on puisse supposer que l'angle que fait la corde avec l'horizontale est un infiniment petit du premier ordre.

On se place dans un repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et on s'intéresse aux forces subies par un tronçon infinitésimal de corde de longueur  $dx$  et de masse  $dm$ . On note  $z(x, t)$  la hauteur du point de la corde d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ .

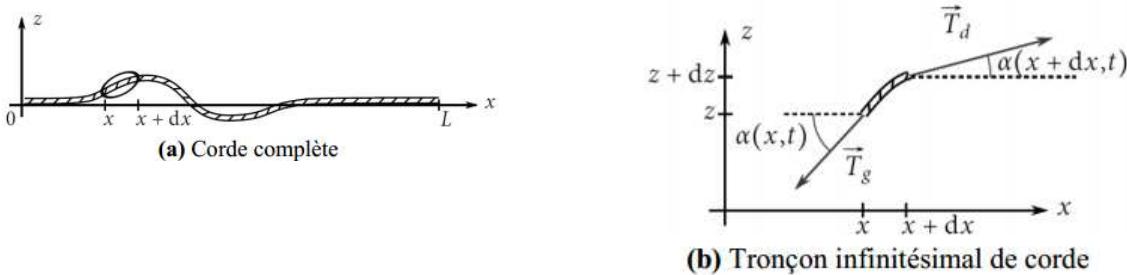


Figure 1

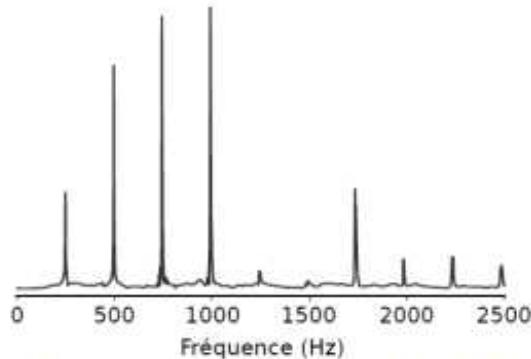
Soit  $\vec{T}_g$  (respectivement  $\vec{T}_d$ ) la tension exercée par la partie gauche (respectivement droite) de la corde sur le tronçon infinitésimal compris entre  $x$  et  $x + dx$  représenté figure 1.

1. Préciser parmi les hypothèses faites, celle qui est validée à partir de l'observation d'une corde de guitare sur l'instrument.
  2. Exprimer  $\alpha$  en fonction d'une dérivée partielle de  $z(x, t)$ .
  3. Exprimer les forces de tension  $\vec{T}_g$  et  $\vec{T}_d$  en fonction de  $T_0$  et  $\alpha$ , d'abord de façon exacte puis, en utilisant l'hypothèse ( $H_4$ ).
  4. Montrer que  $||\vec{T}_g|| = ||\vec{T}_d|| = T_0$ .
  5. Montrer que  $z(x, t)$  vérifie une équation de la forme  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$ . Nommer cette équation, exprimer  $c$  et donner son sens physique et son unité.
- On cherche des solutions de la forme  $z(x, t) = z_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$ .
6. Comment se nomme ce type de solution? Justifier son choix.
  7. Etablir la relation entre  $k$ ,  $\omega$  et  $c$ .
  8. En précisant les conditions aux limites du problème, établir la quantification des pulsations selon l'équation :  $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ .
  9. À partir du document 2: Lire la fréquence du son émis (mode fondamental) et en déduire la célérité des ondes. C'est la corde 1 qui a produit ce son. Calculer sa masse linéique et en déduire la tension de cette corde.

Représenter les ondes qui correspondent aux trois premiers pics du spectre.

#### Document 2 - La guitare : résultats expérimentaux et données techniques

Le son produit par une seule corde de guitare a été enregistré. On donne sur la **figure 2** le spectre (obtenu par décomposition en série de Fourier) du signal proportionnel à l'amplitude de vibration de la corde :



**Figure 2 - Spectre du signal électrique proportionnel à l'amplitude de la corde**

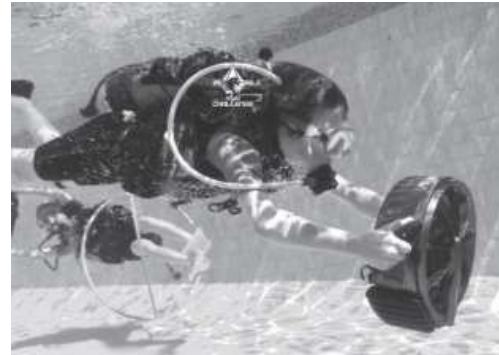
Les cordes sont en nylon de masse volumique  $1\ 140\ \text{kg.m}^{-3}$ , de mêmes longueurs 63 cm et de diamètres différents reportés dans le tableau ci-dessous :

Corde	1	2	3	4	5	6
Diamètre (mm)	1,07	0,81	0,61	0,41	0,25	0,23

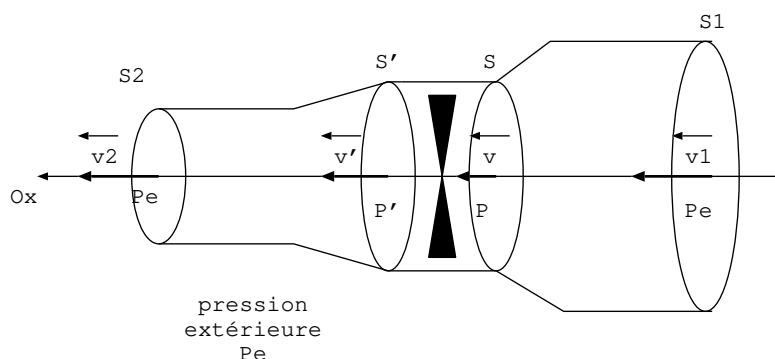
Source 2016 : Wikipédia

## II. Propulseur de plongée

Les plongeurs ont parfois recours à un propulseur de plongée nommé scooter, leur permettant de se propulser plus rapidement et d'explorer davantage les fonds marins. Celui-ci est simplement composé d'une hélice animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe  $Ox$  et peut faire atteindre au plongeur une vitesse maximale de  $10\ km/h$ . L'étude est faite dans le référentiel galiléen  $R'$  lié à l'appareil. On considère un tube de courant possédant la symétrie de révolution autour de  $Ox$  et s'appuyant sur les pales de l'hélice.



Ce tube de courant définit une surface fermée, constituée d'une surface latérale  $S_{lat}$  et des sections droites amont et aval  $S_1$  et  $S_2$ . La pression à l'extérieur est uniforme et égale à  $P_e$ .



Sur la surface  $S_1$ , la vitesse du fluide est uniforme et égale à  $v_1 \vec{e}_x$

Sur la surface  $S_2$ , la vitesse du fluide est uniforme et égale à  $v_2 \vec{e}_x$

Au voisinage de l'hélice, on considère deux sections  $S$  et  $S'$  d'aire sensiblement égale à  $S$  :

- sur la surface  $S$ , la vitesse est  $v \vec{e}_x$  et la pression est  $P$
- sur la surface  $S'$ , la vitesse est  $v' \vec{e}_x$  et la pression est  $P'$

Au voisinage proche de l'hélice entre  $S$  et  $S'$  l'écoulement est perturbé et il existe une discontinuité de la pression de part et d'autre de l'hélice. L'eau de mer sera supposé un fluide parfait et incompressible, en écoulement stationnaire. On néglige l'influence de la pesanteur. On note  $D_m$  le débit massique. On se place en régime stationnaire.

1. Donner les relations entre les surfaces et les vitesses. Que conclure sur  $v$  et  $v'$ ?
2. Exprimer la pression  $P$  en fonction de  $\rho$ ,  $P_e$ ,  $v_1$  et  $v$  puis la pression  $P'$  en fonction de  $\rho$ ,  $v_2$ ,  $P_e$  et  $v$  en déduire  $P' - P$  en fonction de  $\rho$ ,  $v_1$  et  $v_2$ . Préciser le signe de  $P' - P$ .
3. On définit  $\Sigma$  le système ouvert et fixe compris entre les parois  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_{lat}$ . Définir un système fermé  $\Sigma^*$  à partir de  $\Sigma$  et lui appliquer la loi de la quantité de mouvement pour en déduire l'expression de la résultante des forces exercées par l'hélice sur le fluide en fonction de  $\rho$ ,  $S$ ,  $v$ ,  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . Commenter le sens de  $\vec{F}$ .
4. Evaluer de même la force  $\vec{F}$  (résultante des forces exercées par l'hélice sur le fluide, en fonction de  $P$ ,  $P'$  et  $S$ ) en faisant un bilan de quantité de mouvement à partir d'un système ouvert  $\Sigma$  compris entre  $S$ ,  $S'$  et  $S_{lat}$ . En déduire l'expression de  $\vec{F}$  en fonction de  $\rho$ ,  $S$ ,  $v_1$  et  $v_2$ . Déduire du sens de  $\vec{F}$  une justification de l'allure des lignes de courant représentée.
5. En déduire la relation  $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$ .
6. Exprimer la puissance  $\mathcal{P}_f$  fournie par l'hélice au fluide dans  $\mathcal{R}'$ :
  - 6.a. En fonction de  $F$  et  $v$ .
  - 6.b. On considère à nouveau le système  $\Sigma$  le système ouvert et fixe compris entre les parois  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_{lat}$ . En appliquant le théorème de la puissance cinétique à un système convenablement choisi, exprimer  $\mathcal{P}_f$  en fonction de  $v_1$ ,  $v_2$  et du débit massique  $D_m$  circulant dans le tube de courant.

Le plongeur est alors animé d'une vitesse uniforme  $\vec{U} = -U \vec{e}_x$  par rapport au référentiel terrestre noté  $\mathcal{R}_T$  et supposé galiléen. Dans ce référentiel, le fluide au niveau de la surface d'entrée  $S_1$  est immobile et au niveau de la surface de sortie  $S_2$  a une vitesse  $\vec{W}$ .

7. A l'aide de la loi de composition des vitesses, exprimer les vitesses  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en fonction de  $\vec{U}$  et/ou  $\vec{W}$ .

Les résultats précédents permettent de montrer (et on ne demande pas de faire la démonstration) que la force de poussée  $\vec{F}$  et la puissance  $\mathcal{P}_f$  sont reliées par la relation:

$$\mathcal{P}_f^2 - F U \mathcal{P}_f - \frac{F^3}{2S\rho} = 0 \quad (1)$$

En réalité le plongeur subit une force de frottement due à la viscosité de l'eau qui s'oppose à son mouvement et appelée traînée. Son expression est donnée par  $T_r = \frac{1}{2} C_x \rho S_{eff} U^2$  où  $S_{eff}$  est la surface efficace du plongeur (surface de celui-ci projetée dans la plan perpendiculaire au mouvement) et  $C_x$  le coefficient de traînée. On suppose que les résultats précédents sont toujours valables.

8. Déterminer l'unité de  $C_x$ .
9. Le plongeur avançant à vitesse constante, quelle est la relation entre  $F$  et  $T_r$ ? Résoudre l'équation (1) et montrer que la solution s'écrit:

$$P_f = \frac{C_x \rho S_{eff} U^3}{4} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{C_x S_{eff}}{S}} \right]$$

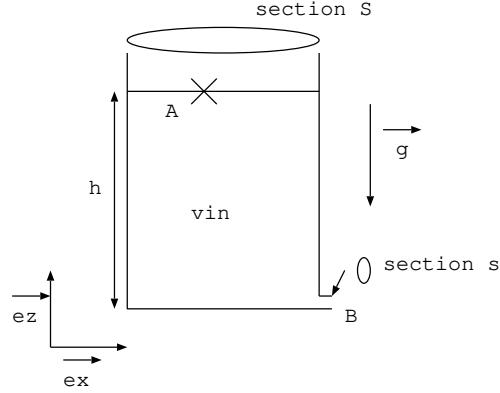
10. Application numérique: le propulseur utilisé présente les indications suivantes:



On donne pour le plongeur dans l'eau  $C_x = 0,1$  et  $S_{eff} = 0,10 \text{ m}^2$ . Calculer  $\mathcal{P}_f$ .

### III. Vidange d'une cuve de fermentation

Une fois la fermentation achevée, le vin, est prêt à être transféré dans une cuve de vieillissement. Cette étape, qu'on appelle écoulement ou saignée, est généralement assistée par la gravité, la vidange s'effectuant par le bas de la cuve. L'objectif de cette partie est d'évaluer la durée de cette opération. On étudie la vidange d'un réservoir cylindrique de section  $S$  par un petit orifice de section  $s \ll S$ . On note  $h_0$  la hauteur initiale du liquide dans le réservoir,  $h(t)$  la hauteur à l'instant  $t$ , et  $g$  l'intensité de la pesanteur terrestre. Le vin est supposé en écoulement incompressible et quasi-stationnaire. On néglige la viscosité du vin.



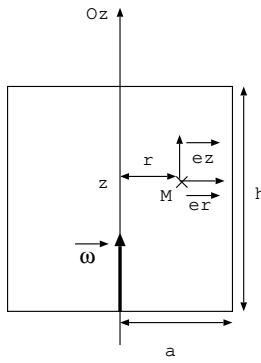
- Exprimer la vitesse  $v_B$  en fonction de la vitesse  $v_A$  et des sections  $S$  et  $s$ .
- Exprimer la vitesse  $v_A$  à l'instant  $t$  en fonction de  $g$ ,  $s$ ,  $S$  et  $h$  dans l'hypothèse où  $s \ll S$ .
- Exprimer la vitesse  $v_A$  du point  $A$  en fonction de la dérivée temporelle de la hauteur  $h$ . Déduire des questions précédentes, l'équation différentielle vérifiée par  $h$ . En déduire le temps de vidange  $\tau$  en fonction de  $g$  et  $h_0$ .
- On peut montrer (et on ne demande pas de le faire) que  $\frac{|\frac{dv_B}{dt}|}{g} = \sqrt{2} \frac{s}{S}$ . Déduire de ce résultat que l'hypothèse d'un écoulement quasi stationnaire est bien vérifiée.

### IV. Enrichissement de l'uranium par ultracentrifugation

L'uranium naturel, mélange d'isotopes constitué à 99,3 % d'uranium  $U^{238}$  et 0,7 % d'uranium  $U^{235}$ , est le combustible des centrales nucléaires. L'uranium  $U^{235}$  est le seul qui soit susceptible de subir la fission.

Pour l'utilisation de l'uranium dans les centrales nucléaires, il faut disposer d'un combustible dont la proportion d'uranium  $U^{235}$  fissile se situe entre 3 % et 5 %. Deux principaux procédés d'enrichissement ont été développés à l'échelle industrielle: la diffusion gazeuse et l'ultracentrifugation. L'ultracentrifugation étudiée ici a pour but d'utiliser la force centrifuge pour séparer, compte tenu de leurs masses différentes, les isotopes  $U^{235}$  et  $U^{238}$  de l'uranium.

Le bol utilisé pour l'ultra-centrifugation a la forme d'un cylindre de rayon  $a$  et hauteur  $h$ . Il est animé, par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen, d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ . Il contient  $N$  molécules de masse molaire  $M_0$  d'un gaz supposé parfait de masse volumique  $\rho$ . On admet que le gaz atteint un état d'équilibre dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au cylindre à la température  $T$  supposée constante (on est donc en régime permanent). On ne tient pas compte de la pesanteur. On repère une particule fluide par ses coordonnées cylindriques. On note  $R$  la constante des gaz parfaits.



On donne, en coordonnées cylindriques, l'opérateur gradient  $\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$ .

1. Faire un bilan des forces exercées sur une particule fluide de volume  $d\tau$  et de masse volumique  $\rho$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . On note  $P$  la pression du gaz supposé parfait.
2. Montrer que  $P$  ne dépend que de  $r$  et que  $P(r)$  s'écrit:  $P(r) = P(0)e^{\frac{M_0 \omega^2 r^2}{2RT}}$  où  $P(0)$  désigne la pression sur l'axe  $Oz$ .
3. En déduire l'expression de  $N^*(r)$ , le nombre de molécules par unité de volume dans le cylindre à la distance  $r$  de l'axe ( $Oz$ ) en fonction des données de l'énoncé et de  $N^*(0)$ , nombre de molécules par unité de volume sur l'axe  $Oz$ . Comparer  $N^*(r)$  et  $N^*(0)$ . Justifier le résultat.
4. Le dispositif précédent est à la base de la méthode d'enrichissement de l'uranium par ultracentrifugation. On introduit un mélange gazeux d'hexafluorure d'uranium  $UF_6$ , contenant les isotopes  $UF_6^{235}$  et  $UF_6^{238}$  de masses molaires respectives  $M_{235} = 349 \text{ g/mol}$  et  $M_{238} = 352 \text{ g/mol}$ , dans un cylindre de rayon  $a$  qui tourne à la vitesse angulaire  $\omega$  constante. La température est  $T$ . On note  $N_{235}^*(r)$  le nombre de noyaux  $UF_6^{235}$  et  $N_{238}^*(r)$  le nombre de noyaux  $UF_6^{238}$ , à la distance  $r$  de l'axe de rotation

On écrit le code suivant:

```
def f(M,T):
    —— a,R,omega=0.1,8.314,25000*2*np.pi/60
    —— return np.exp(M*omega**2*a**2/2/R/T)
print('q1=',f(0.349,300))
print('q2=',f(0.349,400))
print('q3=',f(0.352,300))
print('q4=',f(0.352,400))
```

Son exécution donne:

```
q1= 120.92146745387201
q2= 36.465112412586556
q3= 126.00987605684176
q4= 37.61000908207317
```

- 4.a.** Déduire du code, les valeurs numériques de  $a$  et de  $\omega$  en  $\text{rad/s}$ .

- 4.b.** Que représentent  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  et  $q_4$ ?

Justifier le fait que  $q_3 > q_1$ .

Justifier le fait que  $q_1 > q_2$ .

- 4.c.** On définit le facteur de séparation par  $\tau = \frac{\frac{N_{238}^*(a)}{N_{238}^*(0)}}{\frac{N_{235}^*(a)}{N_{235}^*(0)}}$ . Utiliser les résultats du code pour calculer  $\tau$  et dire s'il est préférable de travailler à basse ou à haute température pour séparer les deux isotopes. Où récupère-t-on dans le bol, un pourcentage plus élevé d'uranium 235? un pourcentage plus élevé d'uranium 238?

## V. Corde vibrante

1. Au repos, on observe que les cordes de guitare sont rectilignes. Elles ne s'incurvent pas, quelle que soit l'orientation choisie pour l'axe de la guitare. L'action du champ de pesanteur sur les cordes peut donc être négligée: l'hypothèse ( $H_1$ ) est validée.

2. Dans le petit triangle rectangle on a  $\tan \alpha(x, t) = \frac{z(x + dx, t) - z(x, t)}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \approx \alpha(x, t)$ .

3. On a  $\vec{T}_d = \|\vec{T}_d\|(\cos \alpha(x + dx, t)\vec{e}_x + \sin(\alpha(x + dx, t))\vec{e}_z)$  et  $\vec{T}_g = \|\vec{T}_g\|(-\cos \alpha(x, t)\vec{e}_x - \sin(\alpha(x, t))\vec{e}_z)$

Aux petits angles  $\cos \alpha \approx 1$  et  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

On a donc  $\vec{T}_d = \|\vec{T}_d\|(\vec{e}_x + \alpha(x + dx, t)\vec{e}_z)$  et  $\vec{T}_g = \|\vec{T}_g\|(-\vec{e}_x - \alpha(x, t)\vec{e}_z)$ .

4. On écrit le PFD appliqué au système élémentaire de corde entre  $x$  et  $x + dx$ :

$$dm \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{e}_z = \vec{T}_d + \vec{T}_g.$$

En projection sur  $Ox$  on a  $\|\vec{T}_d\| = \|\vec{T}_g\|$ : la tension est donc uniforme et elle a pour valeur  $T_0$ , la tension de la corde.

5. On projette sur  $Oz$ :  $\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \alpha(x + dx, t) - T_0 \alpha(x, t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx = T_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx$ .

On a donc  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$ : c'est une équation de d'Alembert avec  $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ , la célérité des ondes.

6. On choisit une solution sous la forme d'une OS car l'espace de propagation est de taille finie. On reconnaît cette OS par le fait que les variables d'espace et de temps ne sont pas dans le même terme.

7. On remplace la solution dans l'équation de d'Alembert et on trouve  $k = \frac{\omega}{c}$ .

8. On applique les CL:

$$z(x = 0, t) = 0$$

$$z(x = L, t) = 0 = z_0 \sin(kL) \cos(\omega t) \text{ soit } \sin(kL) = 0 \text{ soit } k_n = \frac{n\pi}{2L} = \frac{\omega_n}{c} \text{ donc } \omega_n = \frac{n\pi c}{L}.$$

9. Le fondamental a pour fréquence  $f_1 = 250 \text{ Hz}$ .

On utilise la relation de quantification donnée  $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{\pi c}{L}$  soit  $c = 2f_1 L = 315 \text{ m/s}$  (dans la relation de quantification le fondamental correspond à  $n = 1$ ).

La corde est cylindrique de diamètre  $d$ , sa masse s'écrit  $m = \pi(d/2)^2 \rho L = \mu L$  donc  $\mu = \rho \pi (d/2)^2 = 1,010^{-3} \text{ kg/m}$ .

La célérité des ondes est  $c = \frac{T_0}{\mu}$ , on en déduit donc la tension de la corde  $T_0 = c^2 \mu = 101 \text{ N}$ .

## VI. Vidange: correction

1. Pour un écoulement incompressible, on applique la conservation du débit volumique soit  $D_v = v_A S = v_B s$  d'où  $v_B = \frac{S v_A}{s}$ .

2. L'écoulement est incompressible et quasi-stationnaire, le fluide est parfait, on peut appliquer la relation de bernoulli sur la ligne de courant  $AB$  soit  $\frac{\rho v_A^2}{2} + P_A + \rho g z_A = \frac{\rho v_B^2}{2} + P_B + \rho g z_B$  avec  $P_A = P_B = P_0$  (en contact avec l'atmosphère),  $z_B = 0$  et  $z_A = h(t)$ .

On a donc  $\frac{\rho v_A^2}{2} + P_0 + \rho g h = \frac{\rho v_A^2 S^2}{2s^2} + P_0 + 0$  donne  $v_A = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{s^2}{v_A^2} - 1}} \approx \frac{s}{S} \sqrt{2gh}$ .

3. La vitesse est la dérivée par rapport au temps de la position donc  $v_A = -\frac{dh}{dt}$  (attention  $h(t)$  diminue donc  $\frac{dh}{dt} < 0$  et  $v_A > 0$ ).

On a donc  $-\frac{dh}{dt} = \frac{s}{S} \sqrt{2gh}$  que l'on résout en séparant les variables  $\int_{h_0}^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = - \int_0^t \frac{s}{S} \sqrt{2g} dt$  soit  $[2\sqrt{h}]_{h_0}^h = -\frac{s}{S} \sqrt{2g} t$

D'où  $\sqrt{h} - \sqrt{h_0} = -\frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}t$  soit  $h = (\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{s}{S}t)^2$ .

Le temps de vidange  $\tau$  correspond au temps pour lequel on a  $h = 0$  soit  $\tau = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ .

**4.** L'équation d'Euler s'écrit  $\rho(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P$ .

La relation  $\frac{|\frac{dv_B}{dt}|}{g} = \sqrt{2}\frac{s}{S}$  donne  $|\frac{dv_B}{dt}| \ll g$  puisque  $s \ll S$ . On peut donc négliger le terme lié à l'accélération locale  $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  devant la force volumique de pesanteur  $\rho \vec{g}$ . Ce qui revient à écrire  $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ . On est bien en régime stationnaire.

## VII. Correction : propulseur de plongée

**1.** Pour un écoulement incompressible, on écrit la conservation du débit volumique:  $D_v = v_1 S_1 = v S = v' S = v_2 S_2$ , on a donc  $v = v'$ .

**2.** On peut appliquer la relation de Bernoulli sur une ligne de courant car le fluide est parfait, l'écoulement est incompressible et stationnaire et on se met dans une zone où il n'y a pas de pièces mobiles.

Soit sur la ligne de courant entre  $A$  et  $B$ :  $P_A + \frac{\rho v_A^2}{2} + \rho g z_A = P_B + \frac{\rho v_B^2}{2} + \rho g z_B$  d'où  $P_e + \frac{\rho v_1^2}{2} = P + \frac{\rho v^2}{2}$ .

Soit sur la ligne de courant entre  $C$  et  $D$ :  $P_C + \frac{\rho v_C^2}{2} + \rho g z_C = P_D + \frac{\rho v_D^2}{2} + \rho g z_D$  d'où  $P' + \frac{\rho v^2}{2} = P_e + \frac{\rho v_2^2}{2}$ .

On en déduit  $P' - P = P_e + \frac{\rho v_2^2}{2} - P_e + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho(v_2^2 - v_1^2)}{2}$ . Or  $S_2 < S_1$  donc  $v_2 > v_1$ , ce qui implique que  $P' > P$ .

**3.** On note  $\delta m_e$  et  $\delta m_s$ , les masses de fluide qui entrent et qui sortent du système  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$ . On définit le système fermé  $\Sigma^*$  comme étant composé de  $\Sigma$  et  $\delta m_e$  à l'instant  $t$  et  $\Sigma$  et  $\delta m_s$  à l'instant  $t + dt$ .

On applique la loi de la quantité de mouvement au système fermé  $\Sigma^*$  qui subit:

- la résultante des forces de l'hélice  $\vec{F}$

- la résultante des forces de pression qui est nulle ici car la pression extérieure est  $P_e$  uniforme tout autour du système

On a  $\frac{dp_{\Sigma^*}}{dt} = \vec{F}$

avec  $\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}(t + dt) + \delta m_e \vec{v}_1$

avec  $\vec{p}^*(t) = \vec{p}(t) + \delta m_s \vec{v}_2$

avec  $\delta m_e = \delta m_s = D_m dt = \rho S v dt$

Soit  $d\vec{p}^* = \vec{p}^*(t + dt) - \vec{p}^*(t) = \rho S v dt (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

Et donc en remplaçant dans la loi de la quantité de mouvement:  $\rho S v (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}$ .

La force de l'hélice sur le fluide doit être selon  $+Ox$  pour pousser le fluide donc on doit avoir  $v_2 > v_1$ . Ce qui est bien le cas sur le schéma du tube de courant puisque en  $S_2$ , les lignes de courant se resserrent ce qui signifie que la vitesse augmente.

**4.** On définit de la même manière le système fermé  $\Sigma^*$  à partir du nouveau système  $\Sigma$ .

Le bilan des forces s'écrit:

- la force de pression à l'entrée  $P S \vec{e}_x$

- la force de pression à la sortie  $-P' S \vec{e}_x$

- la résultante des forces de pression sur la surface latérale est nulle par symétrie, les forces de pression sont perpendiculaires à la surface en tout point et se compensent deux à deux car la pression est uniforme sur la surface latérale.

- la résultante des forces de l'hélice  $\vec{F}$

En utilisant la démarche de la question précédente on a d'après la loi de la quantité de mouvement  $\frac{d\vec{p}^*}{dt} =$

$$\rho S v (\vec{v}' - \vec{v}) = (PS - P'S) \vec{e}_x + \vec{e}_x$$

On en déduit  $\vec{F} = \rho S v (\vec{v}' - \vec{v}) + (P' - P) S \vec{e}_x = \vec{0} + \frac{\rho(v_2^2 - v_1^2)S}{2} \vec{e}_x$  car  $v \approx v'$  et  $P' - P = \frac{\rho(v_2^2 - v_1^2)}{2}$   
d'après la question 2.

5. On projette les deux expressions de la force de l'hélice obtenue précédemment soit:

$$F = \frac{\rho S(v_2^2 - v_1^2)}{2} = \rho S v (v_2 - v_1).$$

Or on a  $(v_2^2 - v_1^2) = (v_2 - v_1)(v_2 + v_1)$  d'où après simplification  $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$ .

6. 6.a. La puissance de la force est  $P_f = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv$ .

6.b. On veut une expression en fonction de  $v_1$  et  $v_2$  donc on choisit pour système  $\Sigma$  le système ouvert compris entre  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_{lat}$  et on choisit pour système fermé  $\Sigma^*$  le système composé:

à l'instant  $t$ , de  $\Sigma$  et de la masse qui entre dans  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$  soit  $\delta m_e = D_m dt$  à la vitesse  $\vec{v}_1$

à l'instant  $t + dt$ , de  $\Sigma$  et de la masse qui sort de  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$  soit  $\delta m_s = D_m dt$  à la vitesse  $\vec{v}_2$

Le théorème de la puissance cinétique appliqué au système fermé  $\Sigma^*$  s'écrit  $\frac{dE_c^*}{dt} = P(\vec{F}_{ext}) + P(\vec{F}_{int})$

$$\text{avec } E_c^*(t) = E_c(t) + \frac{D_m dt v_1^2}{2}$$

$$\text{avec } E_c^*(t+dt) = E_c(t+dt) + \frac{D_m dt v_2^2}{2}$$

$$\text{d'où } \frac{dE_c^*}{dt} = \frac{Ec^*(t+dt) - Ec^*(t)}{dt} = \frac{D_m(v_2^2 - v_1^2)}{2}.$$

La puissance des forces intérieures est nulle pour un fluide parfait

On évalue la puissance des forces extérieures:

- puissance des forces de pression à l'entrée  $P_e S_1 \vec{e}_x \vec{v}_1 = P_e S_1 v_1 > 0$ .

- puissance des forces de pression à la sortie  $-P_e S_2 \vec{e}_x \vec{v}_2 = -P_e S_2 v_2 < 0$ .

- la puissance des forces de pression sur la surface latérale est nulle car les forces sont perpendiculaires aux lignes de courant donc au vecteur vitesse

- la puissance de l'hélice  $P_f$

$$\text{On en déduit que } \frac{D_m(v_2^2 - v_1^2)}{2} = P_e(S_1 v_1 - S_2 v_2) + P_f \text{ soit } P_f = \frac{D_m(v_2^2 - v_1^2)}{2}.$$

7. La loi de composition des vitesses pour  $\mathcal{R}'$  en translation dans  $\mathcal{R}_T$  s'écrit  $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$  avec  $\vec{v}_e = \vec{v}(O')_{\mathcal{R}_T} = \vec{U}$ .

On a donc sur la surface  $S_1$  à l'entrée de l'hélice:  $\vec{0} = \vec{v}_1 + \vec{U}$  soit  $\vec{v}_1 = -\vec{U}$ .

On a donc sur la surface  $S_2$  à la sortie de l'hélice:  $\vec{W} = \vec{v}_2 + \vec{U}$  soit  $\vec{v}_2 = \vec{W} - \vec{U}$ .

8. Le plongeur subit son poids et la poussée d'Archimède (qui sont des forces verticales) et la force de poussée et la force de traînée (qui sont des forces horizontales). Or le plongeur se déplace à vitesse constante dans  $\mathcal{R}_T$  donc la somme des forces est nulle. En projection selon  $Ox$  on a  $F = T_r$ .

On résout l'équation (1) du second degré, on écrit le discriminant:  $\Delta = (FU)^2 + 4 \frac{F^3}{2\rho S} > 0$ . On en déduit

les deux solutions  $P_f = \frac{FU}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} > 0$  et  $P'_f = \frac{FU}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} < 0$ : solution à exclure.

On a donc  $P_f = \frac{FU}{2} + \sqrt{\frac{F^2 U^2}{4} + \frac{F^3}{2\rho S}} = \frac{FU}{2} [1 + \sqrt{1 + \frac{2F}{\rho SU}}]$ . On remplace  $F$  par  $T_r$  et on obtient le

$$\text{résultat attendu: } P_f = \frac{C_x \rho S_{eff} U^3}{4} [1 + \sqrt{1 + \frac{C_x S_{eff}}{S}}]$$

Avec les données on a  $U = 5 \text{ km/h} = \frac{5}{3,6} \text{ m/s} \approx 1,5 \text{ m/s}$ .

$$\text{AN: } P_f = \frac{0,1 \cdot 10^3 \cdot 0,11^3}{4} [1 + \sqrt{1 + \frac{0,1 \cdot 1,0 \cdot 1}{\pi \cdot 0,3^2}}] \approx 10 \text{ W.}$$

## VIII. Correction: centrifugeuse

1. Le référentiel  $\mathcal{R}'$  n'est pas galiléen car il est en rotation dans  $\mathcal{R}$ .

Une particule fluide de masse  $dm = \rho d\tau$  subit dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ :

- le poids qui est négligé ici
- la résultante des forces de pression  $d\vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}Pd\tau$
- la force d'inertie d'entraînement  $d\vec{F}_{ie} = \rho d\tau \omega^2 r \vec{e}_r$
- la force de Coriolis est nulle car la particule fluide est à l'équilibre dans  $\mathcal{R}'$ .

La particule fluide est à l'équilibre dans  $\mathcal{R}'$  soit:  $d\vec{F}_p + d\vec{F}_{ie} = \vec{0}$  ou encore  $\overrightarrow{\text{grad}}P = \rho \omega^2 r \vec{e}_r$ .

2. En projetant sur  $\vec{e}_\theta$  et sur  $\vec{e}_z$ , on trouve  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$  donc la pression ne dépend ni de  $z$ , ni de  $\theta$ .

En projetant sur  $\vec{e}_r$ , on a  $\frac{dP}{dr} = \rho \omega^2 r$  où  $\rho = \frac{PM_0}{RT}$  car le gaz est supposé parfait.

Soit à résoudre  $\frac{dP}{dr} = \frac{PM_0 \omega^2 r}{RT}$ . En séparant les variables on obtient:  $\frac{dP}{P} = \frac{M_0 \omega^2}{RT} r dr$ .

On intègre entre  $r = 0$  où  $P = P(0)$  et  $r$  où  $P = P(r)$ :

$$\int_{P(0)}^{P(r)} \frac{dP}{P} = \frac{M_0 \omega^2}{RT} \int_0^r r dr \text{ soit } \ln\left(\frac{P(r)}{P(0)}\right) = \frac{M_0 \omega^2 r^2}{2RT} \text{ d'où la pression } P(r) = P(0) e^{\frac{M_0 \omega^2 r^2}{2RT}}$$

3. D'après l'équation des gaz parfaits le nombre de moles par unité de volume s'écrit  $\frac{n}{V} = \frac{P}{RT}$  donc le nombre de molécules par unité de volume est  $N^* = \frac{n N_a}{V} = \frac{P N_a}{RT}$ : la pression et le nombre de molécules par unité de volume sont proportionnels.

La relation sur la pression donne  $N^*(r) = N^*(0) e^{\frac{M_0 \omega^2 r^2}{2RT}}$ .

#### 4.

4.a. On lit  $\omega = 25\ 000 \text{ tours.min}^{-1} = 2618 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $a = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$ .

4.b. La fonction  $f(M,T)$  renvoie le rapport  $\frac{N^*(a)}{N^*(0)} = e^{\frac{M_0 \omega^2 r^2}{2RT}}$ .

$q_1$  est donc  $\frac{N^*(a)}{N^*(0)}$  pour l'isotope  $UF_6^{235}$  à  $T = 300 \text{ K}$ .

$q_2$  est donc  $\frac{N^*(a)}{N^*(0)}$  pour l'isotope  $UF_6^{235}$  à  $T = 400 \text{ K}$ .

$q_3$  est donc  $\frac{N^*(a)}{N^*(0)}$  pour l'isotope  $UF_6^{238}$  à  $T = 300 \text{ K}$ .

$q_4$  est donc  $\frac{N^*(a)}{N^*(0)}$  pour l'isotope  $UF_6^{238}$  à  $T = 400 \text{ K}$ .

Plus l'isotope est lourd et plus le pourcentage d'isotopes au bord du cylindre sera grand:  $q_1 < q_3$ . C'est normal car c'est la force d'inertie centrifuge qui dévie les molécules vers les bords du récipient est proportionnelle à la masse.

Plus la température est élevée et moins la force centrifuge est efficace, la proportion de molécules au bord du récipient par rapport aux molécules au centre du récipient diminue quand la température augmente, c'est ce que traduit le fait que  $q_1 > q_2$ . C'est normal car il y a compétition entre l'énergie de la force centrifuge qui tend à amener les molécules vers le bord du récipient et l'énergie thermique qui tend à désordonner le système. A basse température, la force centrifuge est plus efficace car l'agitation thermique s'oppose moins à cette force.

4.c. Les données permettent de mesurer  $\tau$  à deux températures différentes:

$$\text{à } T = 300 \text{ K: } \tau = \frac{126,01}{120,92} = 1,042$$

$$\text{à } T = 400 \text{ K: } \tau = \frac{37,61}{36,46} = 1,031$$

Le but est de séparer les deux isotopes donc il faut travailler à basse température pour avoir un coefficient de séparation le plus grand possible.

Au centre du bol, on récupère plus d'uranium 235 et au bord du bol, on récupère plus d'uranium 238. En effet plus la masse est grande et plus les noyaux s'accumulent sur les bords.