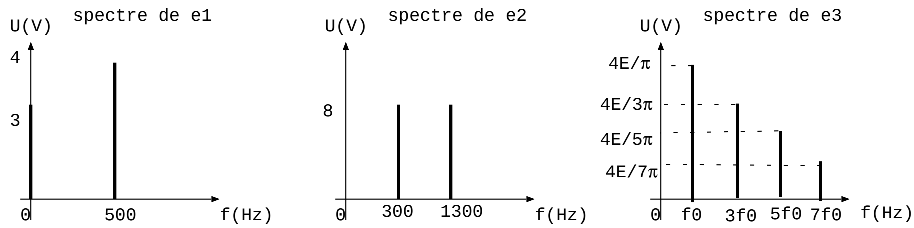
Oraux janvier 2025: les filtres

I. **Pour réviser les filtres**

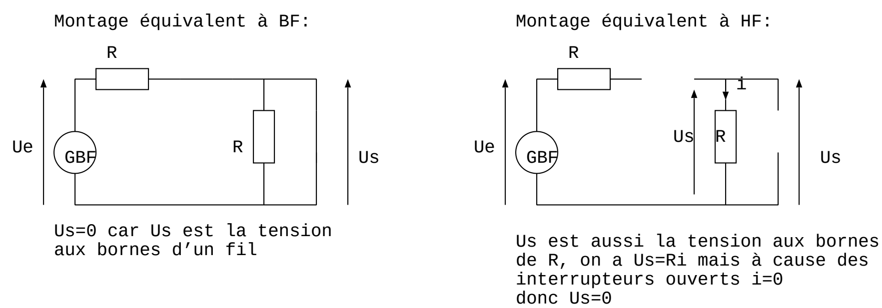
1. Pour tracer le spectre d'un signal à partir de son expression, il faut écrire ce signal sous la forme d'une somme de cosinus ou de sinus. Chaque terme de la forme $A\cos(2\pi f t)$ donne un pic d'amplitude A et de fréquence f. L'offset est un terme constant de la forme B et donne un pic à la fréquence 0 Hz de hauteur B.

Pour la tension e_2: il faut l'écrire en fonction d'une somme de cosinus ou de sinus, pour cela on utilise $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$. Cela donne $e_2(t) = 8\cos(2\pi(800+500)t)\cos(2\pi(800-500)t) = 8\cos(2\pi 1300 t)\cos(2\pi 300 t)$.

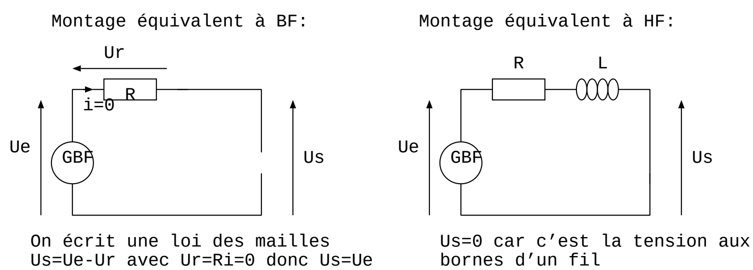
Pour la tension e_3: on décompose la somme infini, cela donne: $e_3(t) = \dfrac{4E}{\pi}\dfrac{\sin(2\pi f_0 t)}{1} + \dfrac{4E}{3\pi}\dfrac{\sin(2\pi 3 f_0 t)}{3} + \dfrac{4E}{5\pi}\dfrac{\sin(2\pi 5 f_0 t)}{5} + \dfrac{4E}{7\pi}\dfrac{\sin(2\pi 7 f_0 t)}{7} + ...$ Il y a une infinité de termes mais dans le spectre on n'en met que les premiers.



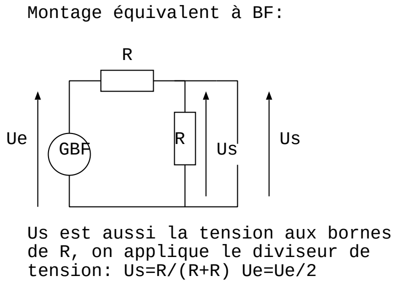
2.

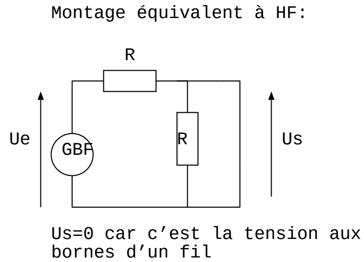


Ce filtre coupe les BF et les HF, c'est un filtre passe bande.



Ce filtre laisse passer les BF et coupe les HF, c'est un filtre passe bas.





Ce filtre laisse passer les BF et coupe les HF, c'est un filtre passe bas.

3. On mesure la période du signal: $2T = 5\ ms$ soit $f = \dfrac{1}{T} = 400\ Hz$. On lit $E = 2\ V$.

La tension de sortie du filtre est de la forme $U_s(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$. On mesure $A = 1,75\ V$ et pour la mesure de ϕ on mesure le décalage en temps entre les courbes (temps entre les deux maxima ou entre les deux minima nuls) $\Delta t = 0,25\ ms$, on en déduit $|\phi| = \dfrac{2\pi\Delta t}{T} = 0,63\ rad$. Ici la courbe en pointillés est en avance sur la courbe en trait plein (elle admet son maximum en premier) donc $\phi > 0$. On a donc $U_s(t) = 1,75\cos(2\pi 400 t + 0,63)\ (en\ V)$.

4. Filtre 1:

4.a. On lit les diagrammes de Bode, on a $G_{dB} = 20\log G$ soit $G = 10^{G_{dB}/20}$.

Fréquence	$0\ Hz$	$200\ Hz$	$1000\ Hz$	$3000\ Hz$
G_{dB}	0	-1	$-7,5$	-16
Gain G	1	$0,9$	$0,42$	$0,16$
Déphasage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$	0	$-0,4\ rad$	$-1,15\ rad$	$-1,4\ rad$

Une tension d'entrée de la forme $U_e(t) = E\cos(2\pi f t)$ a pour tension de sortie $U_s(t) = G(f)E\cos(2\pi f t + \phi(f))$ (en effet le gain G est le rapport de l'amplitude de U_s sur l'amplitude de U_e).

On décompose la tension d'entrée en 3 signaux, on détermine la tension de sortie pour chacun d'eux. U_s est égal à la somme des 3 tensions de sortie car le filtre est linéaire.

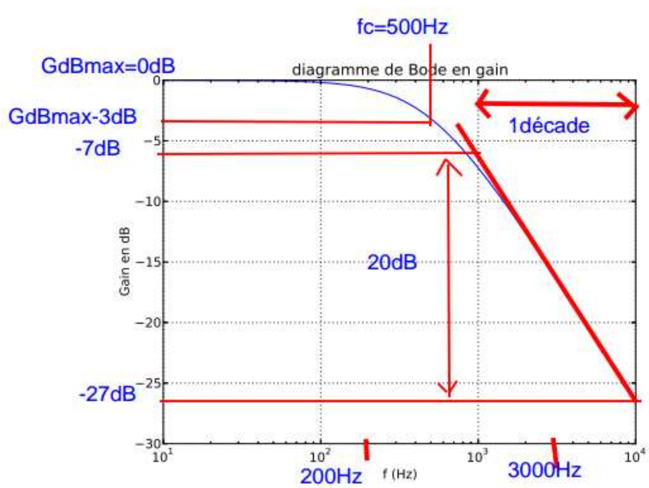
$U_{e1}(t) = 2$: cette tension est un offset, elle a donc une fréquence nulle on a $U_{s1} = G(f = 0)2 = 2\ V$.

$U_{e2}(t) = 5\cos(2\pi 200 t)$: cette tension a pour fréquence $200\ Hz$, on a $U_{s2}(t) = 5G(f = 200)\cos(2\pi 200 t + \phi(f = 200)) = 5.0,9\cos(2\pi 200 t - 0,4) = 0,45\cos(2\pi 200 t - 0,4)\ (en\ V)$

$U_{e3}(t) = 3\cos(2\pi 1000 t)$: cette tension a pour fréquence $1000\ Hz$, on a $U_{s3}(t) = 3G(f = 1000)\cos(2\pi 1000 t + \phi(f = 1000)) = 1,26\cos(2\pi 1000 t - 1,15) =\ (en\ V)$

La tension de sortie est $U_s(t) = 2 + 0,45\cos(2\pi 200 t - 0,4) + 1,26\cos(2\pi 1000 t - 1,15)$ en V.

4.b. Ce filtre laisse passer les BF et coupe les HF, c'est un filtre passe-bas.



4.c. Pour chaque fonction de transfert, on cherche la limite à BF et HF:

$\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$ tend vers 0 à BF et à HF: ce filtre coupe les BF et les HF c'est un filtre passe bande.

$\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ\frac{\omega}{\omega_0}}$ tend vers H_0 à BF et vers 0 à HF: ce filtre laisse passer les BF et coupe les HF c'est le filtre passe-bas étudié. $H_0 = G(f = 0) = 1$ (en effet $G_{dB}(f = 0) = 0\ dB = 20 \log G(f = 0)$ donc $G(f = 0) = 10^{G_{dB}(f=0)/20} = 10^0 = 1$) et ω_0 est la pulsation de coupure soit $\omega_0 = 2\pi f_c = 2\pi 500 = 3100\ rad/s$.

$\underline{H} = H_0 \dfrac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ tend vers 0 à BF et vers H_0 à HF: ce filtre laisse passer les HF et coupe les BF c'est un filtre passe-haut.

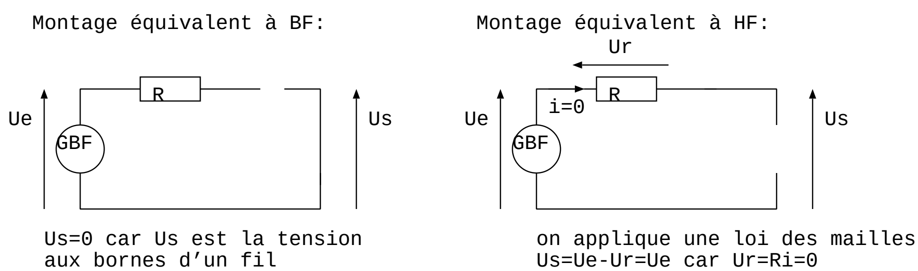
A HF, on cherche un équivalent de la fonction de transfert soit $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ\frac{\omega}{\omega_0}} \approx \dfrac{H_0}{+jQ\frac{\omega}{\omega_0}} \approx \dfrac{H_0\omega_0}{Qj\omega}$.

On a donc $\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \dfrac{H_0\omega_0}{Qj\omega}$ soit $\underline{U}_s = \dfrac{H_0\omega_0\underline{U}_e}{Qj\omega}$.

En notation complexe, diviser par $j\omega$ revient à intégrer soit $U_s = \dfrac{H_0\omega_0}{Q}\displaystyle\int U_e(t)dt$: le filtre est intégrateur.

5. Filtre 2:

5.a.



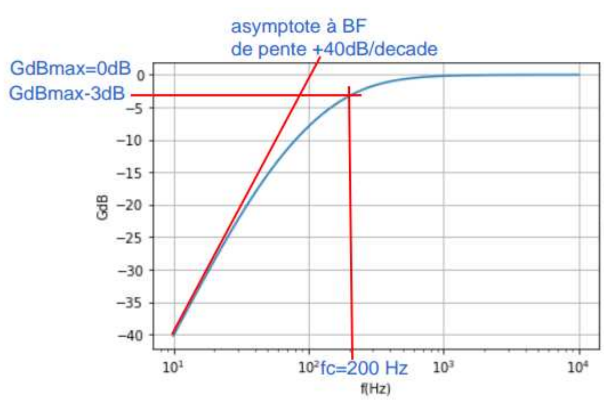
Ce filtre laisse passer les HF et coupe les BF c'est un filtre passe haut.

5.b. On applique le diviseur de tension: $\underline{U}_s = \dfrac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C + \underline{Z}_R}\underline{U}_e = \dfrac{jL\omega}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R}\underline{U}_e$. D'où la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \dfrac{jL\omega}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R} = \dfrac{\frac{jL\omega}{R}}{1 + \frac{jL\omega}{R} + \frac{1}{jRC\omega}}$.

On identifie avec la fonction de transfert de l'énoncé: $\dfrac{jQ\omega}{\omega_0} = \dfrac{jL\omega}{R}$ et $\dfrac{1}{jRC\omega} = \dfrac{jQ\omega_0}{\omega}$. On a donc $\dfrac{Q}{\omega_0} = \dfrac{L}{R}$ et $\dfrac{1}{RC} = Q\omega_0$.

Soit $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$ et $Q\omega_0 = \dfrac{L\omega_0}{R}\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ d'où $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

5.c.



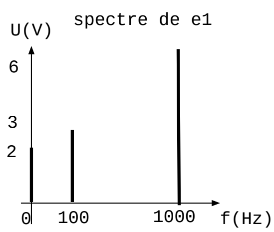
On décompose le signal d'entrée en trois signaux.

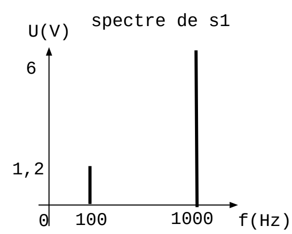
$e_a(t) = 2$: signal de fréquence nulle. Ce filtre coupe les BF donc $s_a = 0$

$e_b(t) = 3\cos(2\pi 100t)$: signal de fréquence $f = 100\ Hz$, la tension de sortie est de la forme $s_b(t) = 3G(f = 100)\cos(2\pi 100t + \phi(f = 100))$. On lit sur les diagrammes de Bode: $\phi(f = 100) = 1,6\ rad$ et $G_{dB}(f = 100) = -8$ soit $G(f = 100) = 10^{-8/20} = 0,4$ d'où $s_b(t) = 3G(f = 100)\cos(2\pi 100t + \phi(f = 100)) = 1,2\cos(2\pi 100t + 1,6)$ en V.

$e_c(t) = 6\cos(2\pi 1000t)$: signal de fréquence $f = 1000\ Hz$, la tension de sortie est de la forme $s_c(t) = 6G(f = 1000)\cos(2\pi 1000t + \phi(f = 1000))$. On lit sur les diagrammes de Bode: $\phi(f = 1000) = 0,25\ rad$ et $G_{dB}(f = 1000) = 0$ soit $G(f = 1000) = 10^{0/20} = 1$ d'où $s_c(t) = 6\cos(2\pi 1000t + 0,25)$ en V.

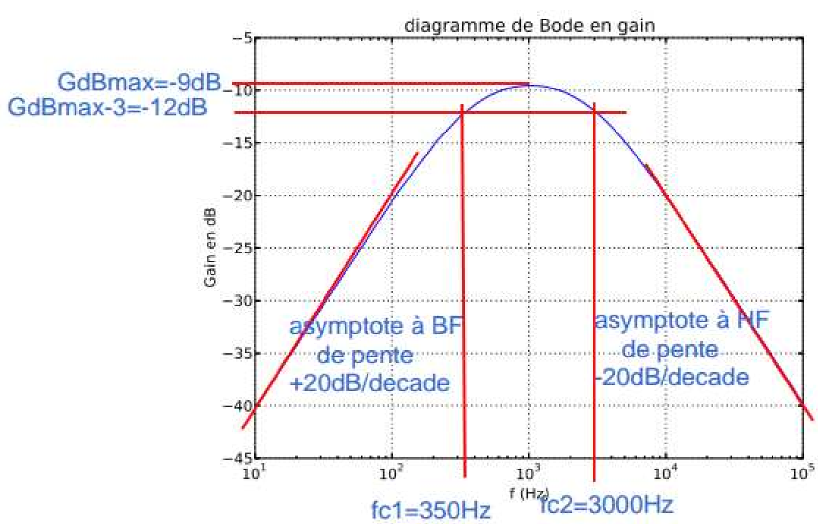
La tension de sortie est $s_1 = s_a + s_b + s_c$ car le filtre est linéaire.





II. Correction : filtre de Wien

1. Ce filtre est un filtre passe bande, il coupe les BF et les HF.



2. On décompose le signal d'entrée en trois signaux.

$U_1(t) = 3$: signal de fréquence nulle. Ce filtre coupe les BF donc $s_1 = 0$

$U_2(t) = 4\cos(2\pi 100t)$: signal de fréquence $f = 100\ Hz$, la tension de sortie est de la forme $s_2(t) = 4G(f = 100)\cos(2\pi 100t + \phi(f = 100))$. On lit sur les diagrammes de Bode: $\phi(f = 100) = 1,3\ rad$ et $G_{dB}(f = 100) = -21$ soit $G(f = 100) = 10^{-21/20} = 0,09$ d'où $s_2(t) = 4.0,09\cos(2\pi 100t + 1,3)$ en V.

$U_3(t) = 6\cos(2\pi 1000t)$: signal de fréquence $f = 1000\ Hz$, la tension de sortie est de la forme $s_3(t) = 6G(f = 1000)\cos(2\pi 1000t + \phi(f = 1000))$. On lit sur les diagrammes de Bode: $\phi(f = 1000) = 0\ rad$ et $G_{dB}(f = 1000) = -9dB$ soit $G(f = 1000) = 10^{-9/20} = 0,36$ d'où $s_3(t) = 6.0,36\cos(2\pi 1000t + 0)$ en V.

la tension de sortie est $s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$.

3. On cherche les limites des fonctions de transfert à BF et HF. C'est la fonction $\underline{H}_2$ qui tend vers 0 à BF et HF, ce qui correspond à un filtre passe bande.

ω_0 correspond à la pulsation de résonance et H_0 est le gain à résonance.

On lit $f_0 = 1000\ Hz$ soit $\omega_0 = 2\pi f_0 = 6280\ rad/s$. On lit $G_{dB} = 20\log G = -9$ donc $G = 10^{-9/20} = 0,35 = H_0$.

On trouve Q en écrivant que pour un filtre passe bande, la bande passante est d'autant plus grande que Q est petit soit $\Delta f = f_{c2} - f_{c1} = \dfrac{f_0}{Q}$. On a $Q = \dfrac{1000}{3000 - 350} = 0,37$.

A BF, on cherche un équivalent de la fonction de transfert: dans $\underline{H}_2$ le terme le plus grand en valeur absolue au dénominateur est $\frac{-jQ\omega_0}{\omega}$, la fonction de transfert est donc équivalente à $\underline{H}_2 = \frac{H_0}{\frac{-jQ\omega_0}{\omega}} = \frac{j\omega H_0}{Q\omega_0}$.

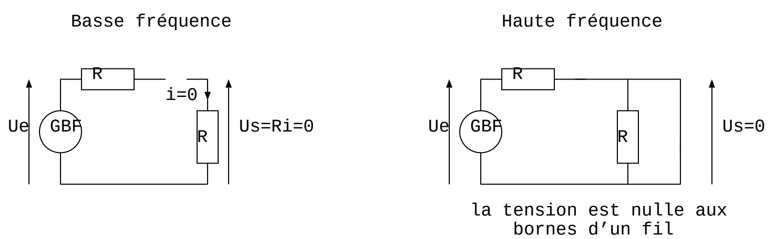
En notation réelle la multiplication par $j\omega$ est équivalente à la dérivée par rapport au temps donc $\underline{H}_2 = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega H_0}{Q\omega_0}$ donne en notation réelle $U_s = \frac{H_0}{Q\omega_0}\frac{dU_e}{dt}$: ce filtre est dérivateur puisque la sortie est la dérivée de l'entrée. La courbe en triangle correspond à l'entrée du filtre, soit U_e, et la courbe en rectangle correspond à la sortie du filtre soit U_s.

Remarque: Au sujet de la résonance: Le gain est le module de la fonction de transfert soit $G = \frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$.

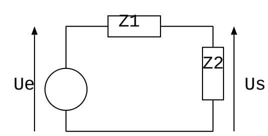
La résonance correspond à un gain maximal. Ici le gain s'exprime sous la forme d'une fraction avec le numérateur qui est constant, donc la fraction est maximale lorsque le dénominateur est minimal. On cherche donc ω pour laquelle $1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2$ est minimal ou encore lorsque $(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2$. La plus petite valeur du terme $(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2$ est 0 puisque c'est un terme positif donc à résonance on a $\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega} = 0$ soit $\omega = \omega_0$.

Et à résonance la fonction de transfert est $\underline{H}(\omega = \omega_0) = H_0$ dont l'argument est nul donc $U_s = H_0 U_e$ et U_s et U_e sont en phase.

4.



Le filtre coupe les BF et les HF, c'est un filtre passe bande.



On se ramène à un circuit de la forme ci-contre.

On a $\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega}$ (association série R-C)

On a $\underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + jC\omega$ (association parallèle R-C)

On applique le diviseur de tension $\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{U}_e = \frac{1}{1+\underline{Z}_1.\underline{Y}_2}\underline{U}_e$.

D'où la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1+(R+\frac{1}{jC\omega})(\frac{1}{R}+jC\omega)} = \frac{1}{3+jRC\omega+\frac{1}{jRC\omega}} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{jRC\omega}{3}+\frac{1}{3jRC\omega}}$.

On identifie avec l'énoncé $H_0 = 1/3$, $\frac{jRC\omega}{3} = \frac{jQ\omega}{\omega_0}$ et $\frac{1}{3jRC\omega} = \frac{-jQ\omega_0}{\omega}$, on a donc $Q\omega_0 = \frac{1}{3RC}$ et $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{RC}{3}$ d'où $Q = \frac{1}{3}$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

III. Correction : détection synchrone

1. On propose pour $s_e(t)$ et $s_r(t)$ des signaux sinusoïdaux de fréquence f_e et f_r, ces signaux n'ont pas forcément la même amplitude et ne sont pas forcément en phase d'où $s_e(t) = E\cos(2\pi f_e t)$ et $s_r(t) = R\cos(2\pi f_r t+\phi)$. On a donc en sortie du multiplieur le signal $s(t) = KER\cos(2\pi f_e t)\cos(2\pi f_r t+\phi) = \frac{KER}{2}(\cos(2\pi(f_e+f_r)t+\phi)+\cos(2\pi(f_e-f_r)t-\phi))$.

Le spectre de $s_M(t)$ comprend donc deux pics de fréquences respectives $f_e+f_r = 2f_e+\frac{2v_0}{c}f_e$ et $|f_e-f_r| = \frac{2v_0}{c}f_e$.

2. On remarque que la fréquence $|f_e-f_r| = \frac{2v_0}{c}f_e$ est proportionnelle à v_0 donc avec un filtre passe bas on peut ne garder que cette composante et la valeur de la fréquence de $s(t)$ permet de mesurer v_0.

On choisit donc un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est comprise entre $|f_e - f_r|$ et $f_e + f_r$.

Avec un circuit RLC série, le filtre passe bas s'obtient en prenant la tension de sortie aux bornes de C.

3. En sortie du filtre, le signal $s(t)$ a pour fréquence $f_s = |f_e - f_r| = \frac{2v_0}{c} f_e$ avec $f_s = 2,80.10^3\ Hz$ d'après l'énoncé. On en déduit donc la vitesse de la voiture $v_0 = \frac{c}{2}\frac{f_s}{f_e} = 42\ m.s^{-1} = 151\ km.h^{-1}$.