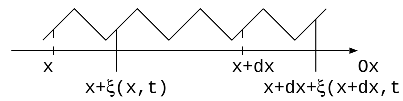
TD 1 ondes mécaniques

I. Ondes le long d'un ressort

1. Le ressort est vertical, il est accroché au plafond et on suspend à ce ressort une masse $m = 20\ g$. Il s'allonge sous l'action du poids de la masse, à l'équilibre, le poids de la masse et la force de rappel se compensent on a $\overrightarrow{F_r} + m\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{F_r} = -k_0 \Delta t \overrightarrow{u}_{ressort\ vers\ M} = -k\Delta l \overrightarrow{e_z}$ en prenant Oz vertical descendant.

On a donc $mg\overrightarrow{e_z} - k\Delta l\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$ soit $k = \dfrac{mg}{\Delta l} = 4\ N/m$.

2. On étudie le système élémentaire compris entre x et $x + dx$ à l'équilibre.



Sa longueur à l'équilibre: $l_0 = dx$

Sa longueur en présence d'une onde: $l = x + dx + \xi(x + dx, t) - x - \xi(x, t) = dx + \dfrac{\partial \xi}{\partial x} dx$

Son allongement: $l - l_0 = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} dx$

Son allongement relatif: $\dfrac{l - l_0}{l_0} = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

3. La tranche de ressort comprise au repos entre x et $x + dx$, a pour masse $\mu_0 dx$ et subit la force de Hooke à droite en $x + dx$: $\overrightarrow{F_d}(x + dx, t) = k_0 l_0 \dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x + dx, t)\overrightarrow{e_x}$ et la force de Hooke à gauche en x: $\overrightarrow{F_g}(x, t) = -\overrightarrow{F_d}(x, t) = -k_0 l_0 \dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)\overrightarrow{e_x}$.

On applique la RFD à ce système élémentaire: $\mu_0 dx \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\overrightarrow{e_x} = k_0 l_0 (\dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x + dx, t) - \dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x, t))\overrightarrow{e_x}$

soit en faisant un DL car dx petit: $\mu_0 dx \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = k_0 l_0 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t)$

$\xi(x, t)$ vérifie donc l'équation de propagation $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \dfrac{\mu_0}{k_0 l_0}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$.

On reconnaît une équation de d'Alembert avec pour vitesse des ondes $c = \sqrt{\dfrac{k_0 l_0}{\mu_0}} = \sqrt{\dfrac{k_0 l_0^2}{m_0}}$. L'onde va d'autant plus vite que le ressort est tendu (k_0 grand) et que sa masse est faible (m_0 petite). AN: $c = 4,7\ m/s$.

Unité: $[k] = [\dfrac{F}{l}] = \dfrac{kg.m.s^{-2}}{m} = kg.s^{-2}$

$[\sqrt{\dfrac{k_0 l_0^2}{m_0}}] = (\dfrac{kg.s^{-2}m^2}{kg})^{1/2} = m.s^{-1}$

II. Ondes sur une corde

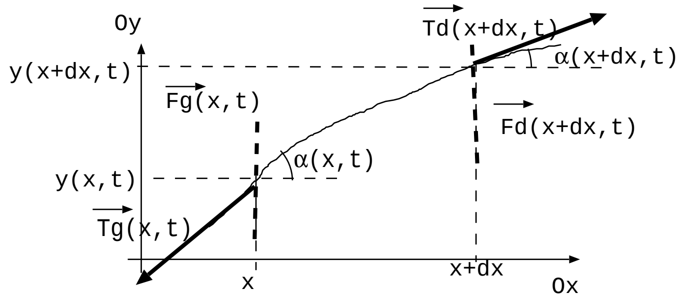
1. D'après le principe de l'action et de la réaction, la force de raideur exercée en $x + dx$ par le bout de corde à droite sur le bout de corde à gauche est l'opposé de la force exercée en $x + dx$ par le bout de corde à gauche sur le bout de corde à droite soit $\overrightarrow{F_d}(x + dx, t) = -\overrightarrow{F_g}(x + dx, t) = -\gamma \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x + dx, t)\overrightarrow{e_y}$.

Remarque: attention il n'y a pas de lien entre $\overrightarrow{F_d}$ et $\overrightarrow{F_g}$ si l'on n'évalue pas ces forces au même abscisse x. Par exemple, $\overrightarrow{F_d}(x, t)$ n'a pas de lien avec $\overrightarrow{F_g}(x + dx, t)$.

2. On considère l'élément de corde situé entre x et $x + dx$ de masse μdx, il subit:

les forces de raideur à droite en $x + dx$ et à gauche en x: $\overrightarrow{F_d}(x + dx, t) = -\overrightarrow{F_g}(x + dx, t) = -\gamma \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x + dx, t)\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{F_g}(x, t) = \gamma \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t)\overrightarrow{e_y}$

les forces de tension à droite et à gauche: $\overrightarrow{T_d}(x + dx, t)$ et $\overrightarrow{T_g}(x, t)$



$\overrightarrow{T_d}(x+dx,t) = ||\overrightarrow{T_d}||(\cos\alpha(x+dx,t)\overrightarrow{e_x} + \sin(\alpha(x+dx,t))\overrightarrow{e_y}) = ||\overrightarrow{T_d}||(\overrightarrow{e_x} + \alpha(x+dx,t)\overrightarrow{e_y})$ car α petit
et $\overrightarrow{T_g}(x,t) = ||\overrightarrow{T_g}||(-\cos\alpha(x,t)\overrightarrow{e_x} - \sin(\alpha(x,t))\overrightarrow{e_y}) = ||\overrightarrow{T_g}||(-\overrightarrow{e_x} - \alpha(x,t)\overrightarrow{e_y})$ car α petit
La RFD appliquée à ce système s'écrit:
$\mu dx\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{F_g}(x,t) + \overrightarrow{F_d}(x+dx,t) + \overrightarrow{T_d}(x+dx,t) + \overrightarrow{T_g}(x,t)$

En projection sur Ox: $||\overrightarrow{T_d}(x+dx,t)|| = ||\overrightarrow{T_g}(x,t)||$ soit la norme de la tension ne dépend pas de x et $||\overrightarrow{T_d}|| = ||\overrightarrow{T_g}|| = T_0$

En projection sur Oy: $\mu dx\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\gamma(\gamma\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x+dx,t) - \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x,t)) + T_0(\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t)) = -\gamma dx\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) + T_0\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}dx$.

En assimilant le petit bout de corde à un segment on a $\tan\alpha(x,t) = \dfrac{y(x+dx,t) - y(x,t)}{dx} = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ car dx petit et $\tan\alpha \approx \alpha$ car α petit d'où $\alpha(x,t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}$

On remplace dans la projection de la RFD sur Oy: $\mu\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\gamma\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) + T_0\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

On obtient une équation de propagation de la forme: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \dfrac{\gamma}{T_0}\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$ avec $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$. Pour $\gamma = 0$ on retrouve bien une équation de d'Alembert.

3. La solution proposée est une OPPH qui se propage selon $+Ox$ (en notation complexe) car les variables x et t sont dans le même terme et ont un signe différent.

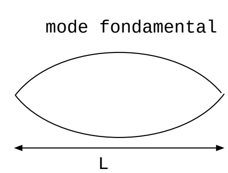
Avec la solution proposée de la forme $\underline{y}(x,t) = y_0 e^{j(\omega t - kx)}$ on a $\dfrac{\partial \underline{y}}{\partial t} = j\omega\underline{y}$ et $\dfrac{\partial \underline{y}}{\partial x} = -jk\underline{y}$

On remplace la solution de la forme $\underline{y}(x,t) = y_0 e^{j(\omega t - kx)}$ dans l'équation de propagation: $\dfrac{\partial^2 \underline{y}}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \underline{y}}{\partial t^2} - \dfrac{\gamma}{T_0}\dfrac{\partial^4 \underline{y}}{\partial x^4} = 0$

soit $(-jk)^2\underline{y} - \dfrac{1}{c^2}(j\omega)^2\underline{y} - \dfrac{\gamma}{T_0}(-jk)^4\underline{y} = 0$

soit en simplifiant par $\underline{y}$: $-k^2 - \dfrac{-\omega^2}{c^2} - \dfrac{\gamma}{T_0}k^4 = 0$ d'où $\omega = kc\sqrt{1 + \dfrac{k^2\gamma}{T_0}}$.

III. **Guitare**



1. Sur la corde se forme une OS avec deux noeuds aux extrémités. Dans le mode fondamental qui correspond à la fréquence $f = 196\ Hz$ que l'on entend on a $L = \dfrac{\lambda_1}{2}$ soit $f_1 = f = \dfrac{c}{\lambda_1} = \dfrac{c}{2L}$ avec $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$.

Soit $c = 2Lf_1 = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$ donne $T_0 = 4L^2 f_1^2 \mu = 4Lf_1^2 m$ avec $m = \rho\pi(d/2)^2 L = 2,8.10^{-3}\ kg$ et $T_0 = 267\ N$.

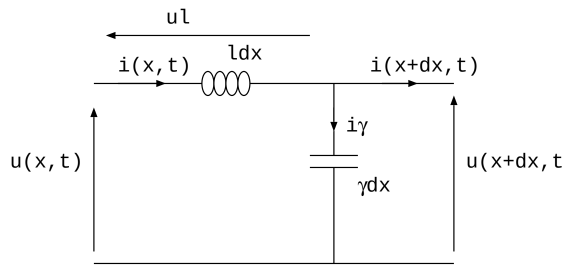
2. Je note $L_1 = 62\ cm$ la longueur de corde qui émet la fréquence $f_1 = 196\ Hz$.

Je cherche L_2 la longueur de corde qui émet la fréquence $f_2 = 2.196 = 392\ Hz$.

Pour la même tension de corde et la même masse linéique, on a $T_0 = 4L_1^2 f_1^2 \mu = 4L_2^2 f_2^2 \mu$ soit $L_2 = \dfrac{L_1 f_1}{f_2} = \dfrac{62.196}{2.196} = 31\ cm$ pour émettre la fréquence $2.196 = 392\ Hz$.

IV. **Propagation dans un câble coaxial**

1. On rappelle les lois de comportement des dipôles: $u_l = ldx\dfrac{\partial i}{\partial t}$ et $i_\gamma = \gamma dx\dfrac{\partial u}{\partial t}$.



On applique le loi des noeuds: $i(x,t) = i_\gamma + i(x+dx,t)$ soit $i(x+dx,t) - i(x,t) = -i_\gamma$ avec dx petit $dx\dfrac{\partial i}{\partial x} = -i_l = -\gamma dx\dfrac{\partial u}{\partial t}$ (équation $(*)$).

On applique la loi des mailles: $u(x,t) = u(x+dx,t) + u_l$ soit $u(x+dx,t) - u(x,t) = -u_l$ avec dx petit $dx\dfrac{\partial u}{\partial x} = -u_l = -ldx\dfrac{\partial i}{\partial t}$ (équation $(**)$).

On obtient donc les équations différentielles $\dfrac{\partial i}{\partial x} = -\gamma\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -l\dfrac{\partial i}{\partial t}$.

2. On dérive la première équation notée $(*)$ par rapport à x: $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial u}{\partial t}) = -\gamma\dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial u}{\partial t}) = \gamma l\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2}$. On obtient une équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \gamma l\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$ avec pour vitesse des ondes $c = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma l}}$.

On dérive la deuxième équation notée $(**)$ par rapport à x: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -l\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial i}{\partial t}) = -l\dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial i}{\partial x}) = l\gamma\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. On obtient une équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma l\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ avec pour vitesse des ondes $c = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma l}}$.

Pour les unités on utilise $u = L\dfrac{di}{dt}$ donc $[L] = [\dfrac{udt}{di}] = \dfrac{Vs}{A} = H$

On utilise $i = c\dfrac{dU}{dt}$ soit donc $[C] = [\dfrac{idt}{dU}] = \dfrac{As}{V} = F$

soit $[(l\gamma)^{1/2}] = (H.m^{-1}F.m^{-1})^{1/2} = (\dfrac{Vs}{A}\dfrac{As}{V}m^{-1})^{1/2} = s^2m^{-2}$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{l\gamma}}$ est bien homogène à une vitesse.

3. On a $u(x,t) = u_0\cos(\omega t - kx)$ soit $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 u$. En remplaçant dans l'équation de d'Alembert on trouve $k = \dfrac{\omega}{c}$.

Je choisis d'utiliser: $\dfrac{\partial i}{\partial x} = -\gamma\dfrac{\partial u}{\partial t}$

On a $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\omega u_0\sin(\omega t - kx)$

soit $\dfrac{\partial i}{\partial x} = -\gamma\dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma\omega u_0\sin(\omega t - kx)$

On intègre par rapport à x: $i(x,t) = \dfrac{\gamma\omega u_0}{k}\cos(\omega t - kx) = c\gamma u_0\cos(\omega t - kx) = \sqrt{\dfrac{\gamma}{l}}u_0\cos(\omega t - kx)$ (j'ai utilisé $k = \dfrac{\omega}{c}$ et $c = \dfrac{1}{\sqrt{l\gamma}}$). La constante d'intégration est nulle car les constantes ne se propagent pas.

On peut trouver le même résultat en partant de l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -l\dfrac{\partial i}{\partial t}$.

On a $\dfrac{\partial u}{\partial x} = +ku_0\sin(\omega t - kx)$

soit $\dfrac{\partial i}{\partial t} = -\dfrac{1}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{ku_0}{l}\sin(\omega t - kx)$

On intègre par rapport à t: $i(x,t) = \dfrac{ku_0}{l\omega}\cos(\omega t - kx) = \dfrac{u_0}{lc}\cos(\omega t - kx) = \sqrt{\dfrac{\gamma}{l}}u_0\cos(\omega t - kx)$ (j'ai utilisé $k = \dfrac{\omega}{c}$ et $c = \dfrac{1}{\sqrt{l\gamma}}$). La constante d'intégration est nulle car les constantes ne se propagent pas.

V. **Fissuromètre**

1. On assimile le cable à un cylindre de volume $\pi R^2 L$ soit de masse $m = \rho\pi R^2 L$, on en déduit sa masse linéique $\mu = \dfrac{m}{L} = \rho\pi R^2 = 0,10\ kg.m^{-1}$.

2. La tension T_0 de la corde est égale en norme à la force de rappel du ressort soit $T_0 = k\Delta = 102.0,015 = 1,53\ N$.

3. L'équation de propagation que vérifie l'élongation $y(x,t)$ sur le câble est l'équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ avec $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$.

On remplace la solution proposée dans l'équation de d'Alembert:

$f''(x)\sin(\omega t) - \dfrac{1}{c^2}(-\omega^2 f(x)\sin(\omega t)) = 0$ après simplification par $\sin(\omega t)$, on a $f''(x) + \dfrac{\omega^2}{c^2}f(x) = 0$, on reconnaît un oscillateur harmonique de pulsation propre $k = \dfrac{\omega}{c}$ soit de solution $f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$.

On cherche une solution $y(x,t) = f(x)\sin(\omega t)$.

Le cable est fixe en $x = 0$ soit: $y(x=0,t) = f(x=0)\sin(\omega t) = 0$ impose $f(x=0) = A = 0$

Le cable est fixe en $x = L$ soit: $y(x=L,t) = f(x=L)\sin(\omega t) = 0$ impose $f(x=L) = B\sin(kL) = 0$. On ne peut pas prendre $B = 0$ car dans ce cas $y(x,t) = 0$ tout le temps et pour tout x, on doit donc avoir $\sin(kL) = 0$ soit $k_n L = n\pi = \dfrac{\omega_n}{c}$ d'où $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{L}$. On en déduit les fréquences propres $f_n = \dfrac{\omega_n}{2\pi} = \dfrac{nc}{2L}$.

La fréquence du fondamental est pour $n = 1$ soit $f_1 = \dfrac{c}{2L}$.

4. La fréquence de vibration du cable dans le mode fondamental est $f_1 = \dfrac{c}{2L} = \dfrac{\sqrt{T_0}}{\sqrt{\mu}2L}$ avec T_0 qui est égale au produit de k avec l'allongement du ressort. Quand la longueur du ressort augmente parce que la fissure s'agrandit, la force de rappel du ressort augmente et donc la tension T_0 augmente, cela fait augmenter la fréquence de vibration de la corde. La mesure des variations de fréquence de vibration du cable permet de mesurer la variation de la largeur de la fissure.

Lorsque le ressort est étiré de Δ, on a $f_1 = \dfrac{\sqrt{k\Delta}}{\sqrt{\mu}2L}$.

Lorsque le ressort est étiré de $\Delta + d$, on a $f_1' = \dfrac{\sqrt{k(\Delta + d)}}{\sqrt{\mu}2L}$.

On a donc $\dfrac{f_1'}{f_1} = \sqrt{\dfrac{\Delta + d}{\Delta}} = 1,0033$.