

CCINP Physique PC 2022

Mesure de la vitesse d'un fluide

Proposition de corrigé

Ce corrigé a été rédigé par Marie THOREY et David LASNE. N'hésitez pas à nous signaler par mail (thoreymarie@aol.com ou david.lasne@wanadoo.fr) toute coquille ou erreur. Vous pouvez le distribuer à vos élèves.

Par ailleurs un certain nombre d'imperfections ou d'ambiguïtés repérées dans l'énoncé de cette épreuve sont notées en rouge au fur et à mesure, principalement à destination des enseignants.

Partie I - Anémomètres mécaniques

I.1 - Anémomètre à plaque

Q1. Une force s'exprime en newtons (N) et une vitesse en m.s^{-1} donc si $F = \mu U^2$ alors μ s'exprime en $\text{N.m}^{-2}.\text{s}^2$.

On peut aller plus loin en utilisant la seconde loi de NEWTON pour écrire $1 \text{ N} = 1 \text{ kg.m.s}^{-2}$ et donc finalement l'unité SI de μ est le kg.m^{-1} .

Q2. On estime le nombre de REYNOLDS de l'écoulement :
$$Re = \frac{\rho_{\text{air}} RU}{\eta_{\text{air}}}.$$

Application numérique : $Re \approx 3500$

Le nombre de REYNOLDS est élevé (supérieur à 2000) donc la force aérodynamique est proportionnelle à U^2 .

Q3. Le système {plaque + tige} subit 3 actions mécaniques dont on peut calculer les moments grâce au bras de levier :

— la liaison pivot, donc le moment est nul : $\mathcal{M}_{\Delta}(\text{pivot}) = \mathbf{0}$;

— le poids : $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = -mgL \sin \theta$ car le poids tend à faire tourner dans le sens indirect ;

— la force aérodynamique : $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = +\mu U^2 L \cos \theta$ car elle tend à faire tourner dans le sens direct.

Q4. A l'équilibre, d'après le TMC, la somme des moments est nulle, ce qui conduit à

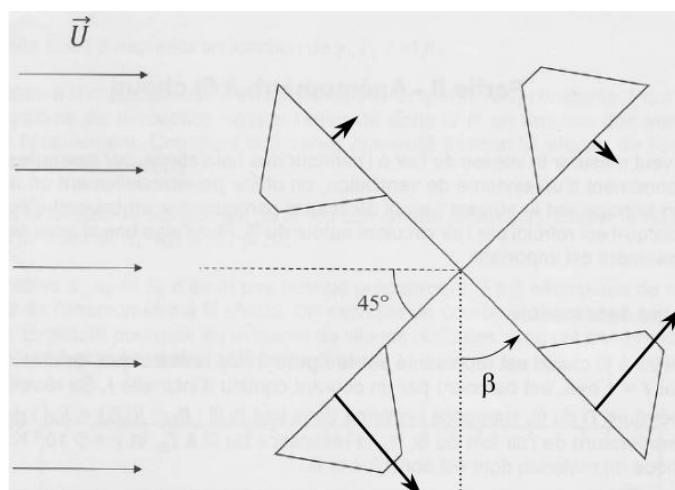
$$-mgL \sin \theta_{eq} + \mu U^2 L \cos \theta_{eq} = 0 \Leftrightarrow U = \sqrt{\frac{mg \tan \theta_{eq}}{\mu}}$$

Application numérique : $U \approx 2 \text{ m.s}^{-1}$ (un seul chiffre significatif donné pour μ), compatible avec les valeurs attendues (quelques m.s^{-1}).

I.2 - Anémomètre à coupelles

Q5. Pour les deux coupelles du bas, on est à $\beta = \pm 45^\circ$. D'après le graphe, C_N est alors positif et élevé, donc la force est importante, et vers la droite.

Pour les 2 coupelles du bas, on est à $\beta = \pm 135^\circ$. D'après le graphe, C_N est alors négatif et faible, donc la force est faible, mais toujours vers la droite, ce qui est naturel compte tenu du sens de l'écoulement.



Q6. Les deux forces agissant dans le sens d'une augmentation de β sont plus importantes que celles en sens inverse. Les bras de levier étant équivalents, le moment global est donc positif par rapport à l'axe de rotation, donc d'après le TMC l'anémomètre va tourner dans le sens direct.

Q7. Le moment de la force \vec{F}_T est nul par rapport à l'axe de rotation (sa droite d'action coupe l'axe de rotation, le bras de levier est nul).

Q8. Un couple de forces est un ensemble de force dont le moment est non nul mais dont la résultante est nulle. Ici, ce n'est pas le cas : les différentes forces poussent vers la droite sur le schéma, donc la résultante est non nulle. Cependant, elles sont compensées par la liaison pivot qui retient la structure, donc cet effet est sans importance.

Q9. Nous n'avons pas d'idée...

Q10. Il existe sans doute des frottements solides dans la liaison pivot qui n'est pas parfaite. Comme dans le cas d'un solide poussé sur un plan, il existe un seuil pour vaincre ces forces et mettre l'objet en mouvement, d'après les lois de COULOMB.

Q11. La description de la mesure effectuée n'est pas très explicite. La solution suivante est proposée faute de mieux, en espérant correspondre à ce qui était attendu.

Si l'anémomètre tourne à vitesse constante, d'après le TMC, le couple est nul. D'après le graphe du document 3 (où $U = 8,0 \text{ m.s}^{-1}$, c'est le cas pour $f \approx 6,2 \text{ Hz}$ donc si $U = \ell_0 f$ en négligeant U_0 , on trouve $\boxed{\ell_0 = \frac{U}{f}}$.

Application numérique : $\ell_0 \approx 6,6 \text{ m}$.

Q12. Question ouverte assez délicate. Nous proposons ici une méthode un peu expéditive, qui n'utilise pas toutes les données. Si on se réfère aux exercices d'induction classique, on sait qu'il s'agit de transducteurs qui convertissent l'énergie mécanique en énergie électrique. Ici un bilan de puissance amènerait au fait que la puissance du couple mécanique est égale en fait à la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans la résistance (la bobine étant idéale, elle ne dissipe aucune puissance en moyenne).

La puissance moyenne dissipée dans la résistance s'écrit $\frac{U_m^2}{R_{\text{osc}}} \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{U_m^2}{2R_{\text{osc}}}$, et la puissance mécanique du couple s'écrit $\Gamma_{\text{res}}\omega$. On a donc :

$$\Gamma_{\text{res}}\omega = \frac{U_m^2}{2R_{\text{osc}}} \Rightarrow \boxed{\Gamma_{\text{res}} = \frac{U^2}{4\pi f R_{\text{osc}}}}$$

Application numérique : $\Gamma_{\text{res}} \approx 2.10^{-3} \text{ mN.m} \ll \Gamma_{\text{aéro}}$.

Partie II - Anémomètre à fil chaud

II.1 - Principe de la mesure

Q13. Erreur d'énoncé manifeste : c'est la résistivité qui est donnée et non la conductivité.

D'après le cours, si ρ_{Pt} est la **résistivité**, alors $\boxed{R_0 = \frac{\rho_{\text{Pt}}\ell}{\pi d^2/4}}$.

Application numérique : $R_0 \approx 1,4.10^2 \Omega$ (en fait, un seul chiffre significatif pour d et ℓ en réalité).

Q14. Appliquons le premier principe au fil, en régime stationnaire :

$$dU = 0 = \delta Q + \delta W$$

Il n'y a pas de travail des forces de pression car le fil est un solide, a priori indéformable. Il y a par contre un travail électrique reçu (qui peut aussi être interprété comme un terme de création d'énergie thermique) : $\delta W_e = R_f I^2 dt$.

Il y a un transfert thermique vers l'extérieur par convection, selon la loi de NEWTON, soit $\delta Q = -\delta Q_{\text{cédé}} = -h(T_f - T_0)S_{lat}dt$, avec $S_{lat} = \pi d \ell$.

Finalement on obtient :

$$R_f I^2 - h(T_f - T_0)\pi d \ell = 0 \Leftrightarrow R_f I^2 - h \frac{R_f - R_0}{\gamma R_0} \pi d \ell$$

Or $h = a_0 + b_0 \sqrt{u}$ donc $\boxed{\frac{R_f I^2}{R_f - R_0} = \frac{\pi d \ell}{\gamma R_0} (a_0 + b_0 \sqrt{u})}$, soit la formule demandée avec $\boxed{K = \frac{\pi d \ell}{\gamma R_0}}$.

Q15. D'après la relation précédente, si la vitesse de l'écoulement U augmente, il faut augmenter I . Ceci se comprend qualitativement : si la vitesse de l'écoulement augmente, le fil se refroidit plus vite, il faut donc augmenter l'effet JOULE pour compenser.

Q16. En convention récepteur, on a $E_f = R_f I$ d'après la loi d'OHM. Or $I = \sqrt{\frac{R_f - R_0}{R_f} K(a_0 + b_0 \sqrt{u})}$ d'après la relation précédente, d'où $\boxed{E_f = \sqrt{R_f(R_f - R_0)K(a_0 + b_0 \sqrt{u})}}$.

Q17. Notons qu'on demande d'analyser la précision de la mesure, alors qu'aucune barre d'erreur n'apparaît sur la courbe...

Si on observe la courbe, on constate que si U passe de 2 à 4 m/s, la tension E_f augmente d'environ 1V, alors que pour le même écart, entre 8 et 10 m/s, la tension varie à peine : le capteur est moins sensible pour les vitesses importantes.

On peut aussi avoir une approche plus mathématique : l'incertitude ΔU sur la vitesse peut s'écrire en fonction de celle sur la tension mesurée ΔE_f : $\Delta U = \frac{dU}{dE_f} \Delta E_f$.

Or pour les grandes vitesses, la courbe est quasi horizontale, donc $\frac{dE_f}{dU} \rightarrow 0$. D'après la relation précédente, l'incertitude ΔU devient alors très importante.

II.2 - Perturbation liée à la convection naturelle

Q18. Le poids s'écrit $\delta \vec{P} = -\rho_f \delta \tau g \vec{e}_z$, la poussée d'ARCHIMÈDE $\delta \vec{\Pi} = +\rho_0 \delta \tau g \vec{e}_z$.

Donc la résultante des deux est $\boxed{\delta \vec{F}_f = (\rho_0 - \rho_f) \delta \tau g \vec{e}_z}$.

Q19. On part de l'équation des gaz parfaits pour exprimer les masses volumiques en fonction de la température : $PV = nRT$ donne $\rho = \frac{M_{\text{air}} P_0}{R T}$ où M_{air} est la masse molaire de l'air et P_0 la pression supposée constante. On a donc $\rho_0 = \frac{M_{\text{air}} P_0}{R T_0}$ et $\rho_f = \frac{M_{\text{air}} P_0}{R T_f}$. En reportant dans la relation précédente, on obtient :

$$\boxed{\delta \vec{F}_f = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_f} \right) \frac{M_{\text{air}} P_0}{R} \delta \tau g \vec{e}_z = \frac{T_0 - T_f}{T_0 T_f} \frac{M_{\text{air}} P_0}{R} \delta \tau g \vec{e}_z}$$

Q20. Question un peu délicate, puisqu'il faut comparer deux termes en ODG à l'intérieur du Laplacien.

La force de viscosité s'écrit $\delta \vec{F}_v = \eta_{\text{air}} \Delta \vec{v} \delta \tau$.

Par définition, le laplacien s'écrit : $\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}$.

En ordre de grandeur $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} \sim \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \sim \frac{u}{d^2} \gg \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} \sim \frac{u}{\ell^2}$ car $\ell \gg d$. On peut donc dire que $\Delta \vec{v} \sim \frac{u}{d^2}$.

Ainsi, $\boxed{\delta \vec{F}_v \sim \eta_{\text{air}} \frac{u}{d^2} \delta \tau \vec{e}_z}$.

Q21. Si les 2 forces sont du même ordre, on a :

$$\frac{T_0 - T_f}{T_0 T_f} \frac{M_{\text{air}} P_0}{R} g \sim \eta_{\text{air}} \frac{u}{d^2}$$

Comme $\frac{M_{\text{air}} P_0}{R T_0} = \rho_0$, on obtient bien $\boxed{\mathbf{u} \sim \frac{T_0 - T_f}{T_f} \frac{\rho_0 g d^2}{\eta_{\text{air}}}}$.

Q22. Application numérique : On trouve $u \sim 3 \cdot 10^{-7} \text{ m.s}^{-1}$, négligeable devant la vitesse de l'écoulement à mesurer.

II.3 - Profil de température le long du fil

Q23. Par un bilan d'énergie, et en utilisant la loi de FOURIER ($j(x) = -\lambda \frac{dT_f}{dx}$),

$$\delta Q_{\text{cond}} = \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} = \phi(x)dt - \phi(x+dx)dt = (j(x) - j(x+dx))\pi \frac{d^2}{4} dt = -\frac{dj}{dx} dx \pi \frac{d^2}{4} dt$$

On obtient finalement $\boxed{\delta Q_{\text{cond}} = \lambda \pi \frac{d^2}{4} \frac{d^2 T_f}{dx^2} dx dt}$

Q24. On a $\boxed{\delta W_e = dRI^2 dt}$.

Q25. En régime stationnaire, l'énergie reçue par le système est égale à l'énergie perdue par le système, soit $\delta Q_{\text{cond}} + \delta W_e = \delta Q_{\text{conv}}$

On en déduit que $\lambda \pi \frac{d^2}{4} \frac{d^2 T_f}{dx^2} dx dt + \frac{R_0}{\ell} (1 + \gamma(T_f - T_0)) dx I^2 dt = h(T_f - T_0) \pi d dx dt$

En posant $\theta_f = T_f - T_0$, et en simplifiant par $dx dt$, on a $\lambda \pi \frac{d^2}{4} \frac{d^2 \theta_f}{dx^2} + \frac{R_0}{\ell} (1 + \gamma \theta_f) I^2 = h \theta_f \pi d$

On en déduit que $\frac{d^2 \theta_f}{dx^2} - \frac{h \pi d - \frac{R_0 \gamma I^2}{\ell}}{\lambda \pi \frac{d^2}{4}} \theta_f = -\frac{4 R_0 I^2}{\ell \lambda \pi d^2}$

En posant $\boxed{\mathbf{K}_1 = \frac{4 \ell h \pi d - 4 R_0 \gamma I^2}{\lambda \ell \pi d^2}}$ et $\boxed{\mathbf{K}_2 = -\frac{4 R_0 I^2}{\ell \lambda \pi d^2}}$, on obtient bien $\boxed{\frac{d^2 \theta_f}{dx^2} - \mathbf{K}_1 \theta_f = \mathbf{K}_2}$.

Q26. On pose $\ell_\Gamma = \frac{1}{\sqrt{K_1}}$, donc l'équation se réécrit $\frac{d^2 \theta_f}{dx^2} - \frac{\theta_f}{\ell_\Gamma^2} \theta_f = K_2$.

La solution de cette équation s'écrit $\theta_f(x) = A e^{x/\ell_\Gamma} + B e^{-x/\ell_\Gamma} - \ell_\Gamma^2 K_2$

D'après les conditions aux limites, $\theta\left(\frac{\ell}{2}\right) = \theta\left(-\frac{\ell}{2}\right) = 0$.

On en déduit que $Ae^{\ell/2\ell_\Gamma} + Be^{-\ell/2\ell_\Gamma} - \ell_\Gamma^2 K_2 = Ae^{-\ell/2\ell_\Gamma} + Be^{\ell/2\ell_\Gamma} - \ell_\Gamma^2 K_2 = 0$,

d'où $A(e^{\ell/2\ell_\Gamma} - e^{-\ell/2\ell_\Gamma}) = B(e^{\ell/2\ell_\Gamma} - e^{-\ell/2\ell_\Gamma})$, soit $A = B$.

On a alors $2A \operatorname{ch}\left(\frac{\ell}{2\ell_\Gamma}\right) - \ell_\Gamma^2 K_2 = 0$, soit $A = \frac{\ell_\Gamma^2 K_2}{2 \operatorname{ch}\left(\frac{\ell}{2\ell_\Gamma}\right)}$ et $\theta_f(x) = \frac{\ell_\Gamma^2 K_2}{\operatorname{ch}\left(\frac{\ell}{2\ell_\Gamma}\right)} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\ell_\Gamma}\right) - \ell_\Gamma^2 K_2$

En posant $\theta_0 = -\ell_\Gamma^2 K_2$, on obtient bien $\boxed{\theta_f(x) = \theta_0 \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{\ell_\Gamma}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\ell}{2\ell_\Gamma}\right)} \right)}$.

Q27. D'après la figure 7, il vaut mieux choisir $\ell_\gamma \ll \ell$ pour avoir une température uniforme. ℓ_γ représente la distance des variations spatiales, et doit donc être choisie la plus faible possible.

Q28. Les ondes laser sont transversales car le champ électrique est perpendiculaire à la direction de propagation. La polarisation est rectiligne car le champ électrique est toujours dirigé suivant \vec{u}_x .

Q29. On a $\epsilon(M) = \langle (E_0 \cos(\omega_L t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM}) + E_0 \cos(\omega_L t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM}))^2 \rangle$

$$\epsilon(M) = E_0^2 \langle \cos^2(\omega_L t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM}) \rangle + E_0^2 \langle \cos^2(\omega_L t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM}) \rangle + 2E_0^2 \langle \cos(\omega_L t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM}) \cdot \cos(\omega_L t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM}) \rangle$$

$$\epsilon(M) = \frac{E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2} + E_0^2 \langle \cos(2\omega_L t - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{OM}) + \cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{OM}) \rangle$$

En posant $\varepsilon_0 = \frac{E_0^2}{2}$, sachant que $\langle \cos(2\omega_L t - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{OM}) \rangle = 0$ et que $\langle \cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{OM}) \rangle = \cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{OM})$ car ce terme est

indépendant du temps, on obtient finalement $\boxed{\epsilon(M) = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{OM}) \right)}$.

Q30. Les franges sont brillantes si $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{OM} = 2p'\pi$ avec p' un entier relatif.

$$\text{On a } \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\cos \alpha \vec{u}_x - \sin \alpha \vec{u}_y - \cos \alpha \vec{u}_x - \sin \alpha \vec{u}_y) = -2 \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \alpha \vec{u}_y.$$

On veut donc avoir $-2y_p \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \alpha 2p'\pi$, donc en posant $p = -p'$ qui est toujours un entier relatif, les franges brillantes sont

caractérisées par $\boxed{y_p = \frac{p\lambda_0}{2 \sin \alpha}}$.

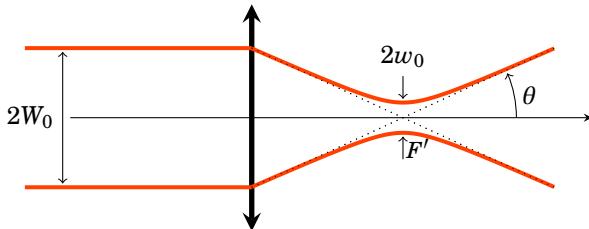
L'interfrange est définie par $\boxed{\Delta y = y_{p+1} - y_p = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha}}$.

Application numérique : $\Delta y = 2,5 \mu\text{m}$.

Q31. La période des fluctuations de signal correspond au temps mis par la particule pour passer d'une frange brillante à la suivante, donc pour parcourir Δy . On a donc $\frac{1}{f_d} = \frac{\Delta y}{|v_y|}$ ce qui donne $\boxed{|\mathbf{v}_y| = \Delta y \cdot f_d}$

Application numérique : $|v_y| = 6,0 \text{ m.s}^{-1}$

Q32. L'énoncé ne fait pas explicitement référence au fait que l'on prend un modèle de faisceau gaussien. Seule la notation w_0 (dont le nom aurai pu être rappelé pour faciliter les choses) évoque cette partie du cours et permet de faire le lien.



Q33. D'après le schéma précédent, $\tan \theta = \frac{W_0}{f'} \approx \theta$, et d'après le cours sur le laser, $\theta = \frac{\lambda_0}{\pi w_0}$ (cette formule est-elle vraiment exigible ? Sinon, par analogie avec la diffraction, $\theta \approx \frac{\lambda_0}{w_0}$, ce qui donne quand même le bon ordre de grandeur),

d'où $\boxed{\mathbf{w}_0 = \frac{\lambda_0 f'}{\pi W_0}}$

Application numérique : $w_0 \approx 26 \mu\text{m}$.

D'après la figure 9, $\sin \alpha = \frac{2w_0}{\delta x}$, d'où $\boxed{\delta x = \frac{2w_0}{\sin(\alpha)}}$

Application numérique : $\delta x \approx 0,50 \text{ mm}$

Pour augmenter la résolution spatiale, il faut diminuer l'angle α (formulation un peu déroutante : "augmenter" la résolution spatiale revient ici à rendre la précision moins bonne puisque la zone de détection est plus grande).

Q34. Si la concentration est trop faible, il y a trop peu de particules, il faut "attendre" le passage aléatoire d'une particule pour avoir une mesure. Et si elle est trop élevée, il n'y aura pas de fluctuations du signal car il y aura trop de particules qui vont traverser les franges en même temps.

Q35. On peut séparer les longueurs d'onde par spectroscopie avec un réseau ou un prisme.

Q36. D'après le cours $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$.

Application numérique : $\lambda = 155 \text{ nm}$

Q37. La différence de marche entre deux rayons successifs dans un milieu d'indice n vaut $\delta = 2n\Lambda \sin(\theta_B)$. On veut $2n\Lambda \sin(\theta_B) = \lambda_0$, d'où $\theta_B = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2c_s/f_s}\right)$.

Application numérique : $\theta_B = 0,043^\circ = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$

Q38. Par conservation de l'énergie, $E'_L = E_L + E_S$, soit $hf'_L = hf_L + hf_S$ d'après la loi de PLANCK-EINSTEIN, et on obtient bien $f'_L = f_L + f_S$.

Q39. La relation de DE BROGLIE aurait pu être introduite, d'autant qu'on est dans un milieu d'indice n , ainsi que quelques informations sur les phonons.

Par conservation de la quantité de mouvement $\vec{p}'_L = \vec{p}_L + \vec{p}_S$.

En projetant sur \vec{u}_z , $p'_L \sin(\theta_B) = -p_L \sin(\theta_B) + p_S$, d'où $\frac{h}{\lambda} \sin(\theta_B) = -\frac{h}{\lambda} \sin(\theta_B) + \frac{h}{\Lambda}$ (en supposant $\lambda' \approx \lambda$ pour le photon, avant et après le choc).

On retrouve bien $\sin(\theta_B) = \frac{\lambda}{2\Lambda}$

Q40. On obtient des franges brillantes lorsque $\frac{4\pi}{\lambda_0} \sin \alpha \left(y + \frac{\lambda_0 f_S}{2 \sin \alpha} t \right) = 2p\pi$ avec p un entier relatif, soit aux positions

$$y'_p = \frac{p\lambda_0}{2\sin\alpha} - \frac{\lambda_0 f_S}{2\sin\alpha} t$$

Les franges se déplacent donc avec une vitesse $v_{\text{franges}} = -\frac{\lambda_0 f_S}{2 \sin \alpha}$. Elles vont vers le bas si $\sin \alpha > 0$ (angle non orienté a priori).

Q41. Question délicate. Il est clair que la symétrie du problème est brisée et donc que l'on va pouvoir obtenir une information sur le sens de parcours, mais pour établir la relation explicite entre la direction de déplacement des billes et l'effet sur le signal mesuré, il faut avoir une représentation claire de la situation et de la jolie astuce proposée, ce que l'énoncé permet difficilement...

Supposons $\alpha > 0$, les franges se déplacent vers le bas à $v_{\text{franges}} < 0$. Si le fluide contenant les billes se déplace à v_y (par rapport au référentiel du laboratoire), alors les billes se déplacent à $v_y - v_{\text{franges}} > v_y$ par rapport aux franges (composition des vitesses).

En reprenant le raisonnement de la **Q31.**, on aura $f'_d = \frac{|v_y - v_{\text{franges}}|}{\Delta y}$.

Ainsi, si $v_y > 0$, la fréquence des fluctuations sera plus importante (les billes "vont au devant des franges") que si $v_y < 0$ (les billes "courent après les franges") : la mesure de la fréquences des fluctuations de signal permet maintenant de connaître intégralement la vitesse du fluide.

***** FIN DU CORRIGE *****