Questions de cours sur les ondes

I. **Enoncé**

1. L'onde de la forme $s(x,t) = s_0 e^{kx}\cos(\omega t)$ est-elle: plane? progressive? stationnaire?

2. Soit une corde cylindrique de rayon R et de masse volumique ρ tendue sous la tension T_0. On note $y(x,t)$ la hauteur de la corde au point d'abscisse x à l'instant t.

2.a. Exprimer la masse linéique de la corde.

2.b. Rappeler, sans démonstration, l'expression de la célérité des ondes sur la corde et l'équation de propagation vérifiée par $y(x,t)$.

2.c. Donner la solution sous la forme d'une $OPPH^-$.

3. La perturbation d'une onde est donnée par $\underline{s} = s_0 e^{j(kx-\omega t)}$. On donne l'équation de propagation $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \alpha\dfrac{\partial s}{\partial t} = 0$.
Donner la nature de l'onde et déterminer la relation de dispersion.

4. Une onde se propage sur une corde de très grande longueur, la perturbation est notée $y(x,t) = y_0\sin(kx - \omega t)$. Préciser la nature de cette onde et justifier ce choix.

5. Une onde sonore se propage dans un tuyau de longueur L, la surpression est notée $p_1(x,t) = p_m\sin(kx)\sin(\omega t)$. Préciser la nature de cette onde et justifier ce choix. On a $p_1(x = L, t) = 0$. En déduire les valeurs de fréquences possibles pour cette onde.

6. Soit un solide de masse volumique ρ et de module d'Young E. Exprimer (sans démonstration) et évaluer la célérité des ondes dans ce solide.

7. Une corde a pour longueur $l = 1,2\ m$ et pour masse $m = 50\ g$. Cette corde est tendue sous l'action d'une masse $M = 650\ g$. Cette corde est utilisée pour réaliser l'expérience de la corde de Melde, le vibreur et la poulie sont distants de $L = 1,0\ m$. Calculer la fréquence fondamentale de cette corde et les fréquences des deux premiers harmoniques.

8. Donner le domaine des fréquences audibles par l'oreille humaine.

9. Donner l'expression du coefficient de compressibilité isentropique en fonction de la pression et du volume puis en fonction de la masse volumique et de la pression. Que signifie le mot isentropique?

10. Donner sans démonstration l'expression de la célérité des ondes sonores dans un GP. Données: $\gamma = 1,4$, $M = 29\ g.mol^{-1}$ et $T = 300\ K$.

11. Rappeler ce qu'est l'approximation acoustique.

12. Définir par analogie électrique la notion d'impédance acoustique.

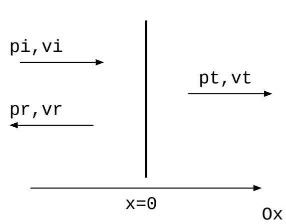
13. Des ondes sonores se propagent dans un milieu de masse volumique μ_0 à la célérité c. On donne les surpressions $p_a(x,t) = p_m\cos(\omega t - kx)$ et $p_b(x,t) = p_m\cos(\omega t + kx)$. Exprimer les ondes de vitesse $v_a(x,t)$ et $v_b(x,t)$. Exprimer les intensités acoustiques de ces deux ondes.

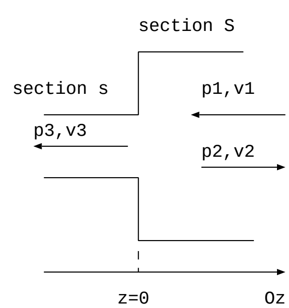
14. Soit un tuyau de longueur L. Représenter dans le mode fondamental et le premier harmonique, l'onde stationnaire de surpression et de vitesse. Exprimer la fréquence du fondamental en fonction de la longueur L et de la célérité des ondes dans le tuyau.

- dans le cas où le tuyau est ouvert aux deux extrémités

- dans le cas où le tuyau est ouvert à une extrémité et fermé à l'autre.

15. Dans les deux situations suivantes, écrire les équations de continuité:





II. **Correction**

1. L'onde de la forme $s(x,t) = s_0 e^{kx}\cos(\omega t)$ est plane car elle ne dépend que d'une variable en coordonnées cartésiennes, elle est stationnaire car les variables x et t ne sont pas dans le même terme.

2. Soit une corde cylindrique de rayon R et de masse volumique ρ tendue sous la tension T_0. On note $y(x,t)$ la hauteur de la corde au point d'abscisse x à l'instant t.

2.a. La masse de la corde est de la forme $m = \rho\pi R^2 L = \mu L$, on a donc $\mu = \rho\pi R^2$.

2.b. La célérité des ondes sur la corde s'écrit $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$, les ondes vont d'autant plus vite que la corde est tendue et peu dense. L'équation de propagation vérifiée par $y(x,t)$ est l'équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$.

2.c. La solution sous la forme d'une $OPPH^-$ est $y(x,t) = y_0\cos(\omega t + kx)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$.

3. La perturbation d'une onde est donnée par $\underline{s} = s_0 e^{j(kx-\omega t)}$. On reconnaît une $OPPH$ qui se propage selon $+Ox$ donnée en notation complexe.

On a donc $\dfrac{\partial \underline{s}}{\partial t} = -j\omega\underline{s}$, $\dfrac{\partial^2 \underline{s}}{\partial t^2} = (-j\omega)^2\underline{s} = -\omega^2\underline{s}$, $\dfrac{\partial \underline{s}}{\partial x} = jk\underline{s}$ et $\dfrac{\partial^2 \underline{s}}{\partial x^2} = (jk)^2\underline{s} = -k^2\underline{s}$.

On trouve la relation de dispersion en remplaçant la solution proposée dans l'équation de propagation (l'équation de propagation est donnée en notation réelle, elle est valable en notation complexe). On a donc $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \alpha\dfrac{\partial s}{\partial t} = 0$ qui donne $-k^2\underline{s} - (\dfrac{-\omega^2}{c^2})\underline{s} + \alpha(-j\omega\underline{s}) = 0$ soit $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \alpha j\omega$.

4. La perturbation notée $y(x,t) = y_0\sin(kx - \omega t)$ correspond à une $OPPH^+$ car x et t sont dans le même terme et de signes opposés, ce choix correspond au fait que le milieu de propagation est de taille infinie.

5. La surpression notée $p_1(x,t) = p_m\sin(kx)\sin(\omega t)$ correspond à une OS car t et x ne sont pas dans le même terme ce qui est cohérent avec le fait que l'onde se propage dans un espace de taille finie.

On applique la condition aux limites $p_1(x = L, t) = 0 = p_m\sin(kL)\sin(\omega t)$. Ce qui impose $\sin(kL) = 0$ soit $k_n L = n\pi$. Or $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi f}{c} = \dfrac{n\pi}{L}$ donc les fréquences possibles sont $f_n = \dfrac{nc}{2L}$.

6. La célérité des ondes dans ce solide s'écrit $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$: les ondes vont d'autant plus vite que le milieu est rigide (E grand) et peu dense. AN: $E \approx 10^{10}\ Pa$ et $\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$ soit $c = \sqrt{10^7} = 3000\ m/s$.

7. Une corde a pour longueur $l = 1,2\ m$ et pour masse $m = 50\ g$. Cette corde est tendue sous l'action d'une masse $M = 650\ g$. Cette corde est utilisée pour réaliser l'expérience de la corde de Melde, le vibreur et la poulie sont distants de $L = 1,0\ m$. Calculer la fréquence fondamentale de cette corde et les fréquences des deux premiers harmoniques.

8. Les fréquences audibles par l'oreille humaine s'étendent entre 20 Hz (son grave) et 20 kHz (son aigu).

9. Le coefficient de compressibilité isentropique s'écrit $\chi_S = -\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial P} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial P}$. Le mot isentropique signifie entropie constante, soit les transformations des tranches de fluide sont adiabatiques et réversibles.

10. La célérité des ondes sonores dans un GP est $c = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\dfrac{1,4.8,3.300}{29.10^{-3}}} = 340\ m.s^{-1}$.

11. L'approximation acoustique consiste à écrire que la surpression $p_1 = P - P_0$, la surmasse volumique $\mu_1 = \mu - \mu_0$ et la vitesse des tranches de fluide v_1 sont des infiniment petits d'ordre 1. On effectue donc des DL à l'ordre 1 pour linéariser les équations de la mécanique et de la thermodynamique.

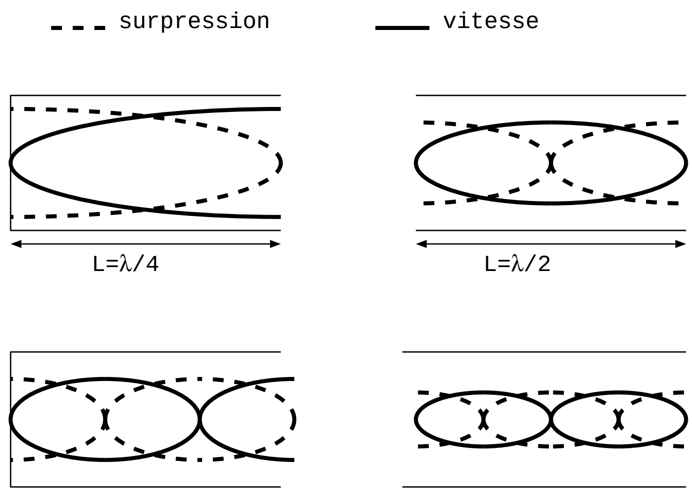
12. L'impédance électrique s'écrit $Z = \dfrac{U}{i}$ où U est la différence de potentiel et i le débit ou le flux de charges.

En acoustique, la tension est remplacée par la différence de pression soit $p_1 = P - P_0$ et l'intensité par la vitesse v_1 donc $Z = \dfrac{p_1}{v_1}$.

13. La surpression $p_a(x,t) = p_m\cos(\omega t - kx)$ correspond à une $OPPH^+$ pour laquelle $Z = \dfrac{p_a}{v_a} = +\mu_0 c$ on a donc $v_a(x,t) = \dfrac{p_m}{\mu_0 c}\cos(\omega t - kx)$. L'intensité acoustique est $I_a = < p_a v_a > = \dfrac{p_m^2}{2\mu_0 c} > 0$: normal car l'onde se propage selon $+Ox$.

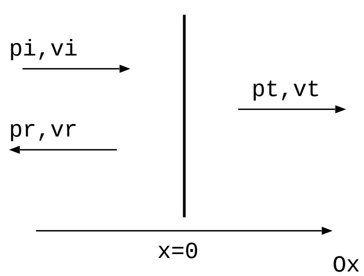
La surpression $p_b(x,t) = p_m \cos(\omega t + kx)$ correspond à une $OPPH^-$ pour laquelle $Z = \dfrac{p_b}{v_b} = -\mu_0 c$ on a donc $v_b(x,t) = -\dfrac{p_m}{\mu_0 c}\cos(\omega t + kx)$. L'intensité acoustique est $I_b =< p_b v_b >= -\dfrac{p_m^2}{2\mu_0 c} < 0$: normal car l'onde se propage selon $+Ox$.

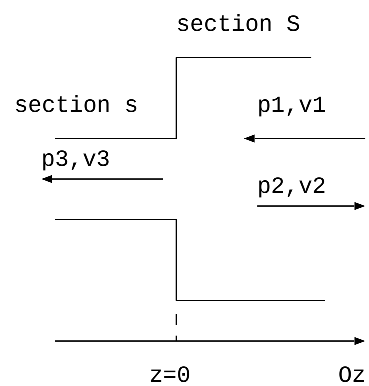
14. Sur une extrémité ouverte on a un noeud de surpression et un ventre de vitesse. Sur une extrémité fermée on a un ventre de surpression et un noeud de vitesse.



On applique ensuite $f = \dfrac{c}{\lambda}$ soit $f = \dfrac{c}{2L}$ pour le tuyau ouvert aux deux bouts et $f = \dfrac{c}{4L}$ pour le tuyau ouvert d'un côté et fermé de l'autre.

15. Dans les deux cas, on écrit la continuité de la surpression et du débit volumique. Dans le cas de droite, comme la section est identique en $x < 0$ et en $x > 0$, la continuité du débit volumique devient la continuité de la vitesse.





Continuité de la pression:

$p(x = 0^-, t) = p(x = 0^+, t)$

soit $p_i(x = 0, t) + p_r(x = 0, t) = p_t(x = 0, t)$

Continuité de la vitesse:

$v(x = 0^-, t) = v(x = 0^+, t)$

soit $v_i(x = 0, t) + v_r(x = 0, t) = v_t(x = 0, t)$

Continuité de la pression:

$p(z = 0^-, t) = p(z = 0^+, t)$

soit $p_3(z = 0, t) = p_1(z = 0, t) + p_2(z = 0, t)$

Continuité du débit volumique :

$sv(z = 0^-, t) = Sv(z = 0^+, t)$

soit $sv_3(z = 0, t) = S(v_1(z = 0, t) + v_2(z = 0, t))$.