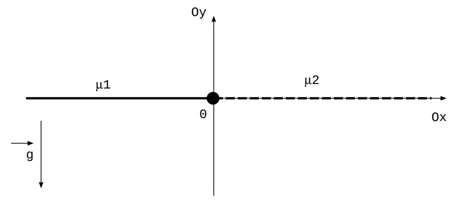
TD 3 ondes

I. **Deux cordes de masses différentes**

Une corde vibrante très longue et donc considérée comme infinie, est soumise à une tension T_0. Elle est formée d'une corde de masse linéïque μ_1 pour $x < 0$ et d'une corde de masse linéique μ_2 pour $x > 0$. Elles sont réunies en $x = 0$ par un noeud, considéré comme une masse ponctuelle M.



Les vitesses de propagation des ondes à gauche et à droite du noeud sont notées respectivement c_1 et c_2. Un générateur d'ondes très loin à gauche (soit en $x \to -\infty$) génère une OPPH incidente qui se propage selon $+Ox$ notée $y_i(x,t)$ de la forme $y_i(x,t) = y_0 \cos(\omega t - k_1 x)$. Arrivée sur le noeud, cette onde met celui-ci en mouvement transversal, de même pulsation que l'onde incidente. A son tour, le mouvement du noeud génère une onde réfléchie notée $y_r(x,t)$ et une onde transmise notée $y_t(x,t)$.

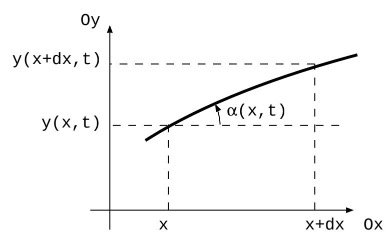
1. Rappeler, sans démonstration, les équations de propagation vérifiées par $y_i(x,t)$, $y_r(x,t)$ et $y_t(x,t)$. Donner les expressions de c_1 et c_2 en fonction des données puis de k_1 et k_2, les vecteurs d'onde sur la corde 1 et sur la corde 2, en fonction de c_1, c_2 et ω.

2. On note ry_0 et τy_0 les amplitudes respectives des ondes réfléchies et transmises. Exprimer en notation réelle $y_r(x,t)$ et $y_t(x,t)$.

3. On note $y(x = 0^-, t)$ et $y(x = 0^+, t)$, la hauteur de la corde respectivement juste à gauche et à droite du noeud. Que pensez-vous de ces deux hauteurs? En déduire une première relation entre r et τ (équation $(*)$).

4.

4.a. Soit le système infinitésimal de corde compris au repos entre x et $x + dx$. On note $y(x,t)$ la hauteur de la corde en x à l'instant t. Dans l'approximation des petits angles, exprimer $\alpha(x,t)$ en fonction d'une dérivée de $y(x,t)$.



4.b. **Le noeud est supposé sans masse.** Déduire de la RFD appliquée au noeud, l'égalité $\dfrac{\partial y}{\partial x}(x = 0^-, t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}(x = 0^+, t)$. Enfin déduire de cette égalité, une relation entre r, τ, c_1 et c_2 (équation $(**)$).

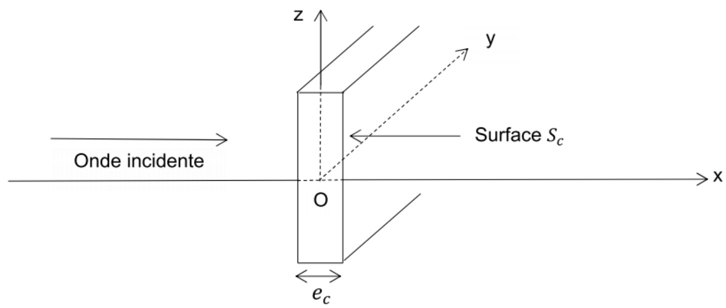
5. Déduire de la résolution du système composé des équations $(*)$ et $(**)$, les expressions de r et τ en fonction de c_1 et c_2. Commenter ces expressions.

6. Dans le cas où $\mu_1 << \mu_2$, donner les expressions approchées de r et τ. Exprimer les ondes $y(x < 0, t)$ et $y(x > 0, t)$. Commenter le résultat. On donne: $\cos p - \cos q = -2 \sin(\dfrac{p+q}{2}) \sin(\dfrac{p-+q}{2})$.

Réponses: 1- $k_1 = \dfrac{\omega}{c_1}$ *et* $k_2 = \dfrac{\omega}{c_2}$ *3-* $1 + r = \tau$ *4-* $1 - r = \dfrac{c_1 \tau}{c_2}$ *5-* $r = \dfrac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$ *et* $\tau = \dfrac{2c_2}{c_1 + c_2}$ *6-* $r = -1$ *et* $\tau = 0$ *on trouve une OS*

II. **Transmission du son à travers une cloison**

Une OPPH se propage dans l'air. Cette onde de pulsation ω arrive sous incidence normale sur une cloison rigide et non absorbante d'épaisseur e_c, de surface S_c et de masse M_c. L'épaisseur de la cloison est très petite devant la longueur d'onde donc on assimile la cloison à une cloison très fine placée en $x = 0$.



Pour l'onde incidente, on note $p_i(x,t)$ la surpression acoustique et $v_i(x,t)$ la vitesse particulaire. On désigne $\underline{p}_i(x,t)$ et $\underline{v}_i(x,t)$ les expressions complexes correspondantes. On note k la norme du vecteur d'onde, p_{im} l'amplitude de la surpression de l'onde incidente.

On définit l'impédance acoustique du milieu Z.

1. Exprimer les ondes complexes $\underline{p}_i(x,t)$ et $\underline{v}_i(x,t)$ en fonction de k, ω, Z et p_{im}.

2. Rappeler la relation entre k, ω et c.

Pour l'onde réfléchie, on note $p_r(x,t)$ la surpression acoustique et $v_r(x,t)$ la vitesse particulaire. On désigne $\underline{p}_r(x,t)$ et $\underline{v}_r(x,t)$ les expressions complexes correspondantes. On note $\underline{p_{rm}}$ l'amplitude de la surpression de l'onde réfléchie.

3. Exprimer les ondes complexes $\underline{p_r}(x,t)$ et $\underline{v_r}(x,t)$ en fonction de k, ω, Z et $\underline{p_{rm}}$.

Pour l'onde transmise, on note $p_t(x,t)$ la surpression acoustique et $v_t(x,t)$ la vitesse particulaire. On désigne $\underline{p}_t(x,t)$ et $\underline{v}_t(x,t)$ les expressions complexes correspondantes. On note $\underline{p_{tm}}$ l'amplitude de la surpression de l'onde réfléchie.

4. Exprimer les ondes complexes $\underline{p_t}(x,t)$ et $\underline{v_t}(x,t)$ en fonction de k, ω, Z et $\underline{p_{tm}}$.

Les surpressions sonores sont à l'origine d'une vibration de la cloison mince. Par le choix d'une bonne origine des temps cette vibration peut être modélisée par son déplacement $X_c(t) = X_m \cos(\omega t)$ auquel on associe le déplacement complexe $\underline{X_c}(t)$.

5. Exprimer en notation complexe la position $\underline{X_c}(t)$, la vitesse $\underline{v}(t)$ et l'accélération de la cloison $\underline{a}(t)$.

6. Exprimer en notation complexe, les forces de pression exercées sur la cloison.

7. Déduire du PFD appliqué à cloison une équation reliant M_c, S_c, ω, X_m, p_{im}, $\underline{p_{rm}}$ et $\underline{p_{tm}}$. Commenter la relation trouvée dans la cas où $M_c = 0$.

8. Utiliser la continuité de la vitesse de la cloison pour trouver une relation entre X_m, ω, $\underline{p_{tm}}$ et Z.

Utiliser la continuité de la vitesse de la cloison pour trouver une relation entre p_{im}, $\underline{p_{rm}}$ et $\underline{p_{tm}}$.

Déduire de ces deux relations que $X_m = \dfrac{p_{im} - \underline{p_{rm}}}{j\omega Z}$.

9. On pose $\omega_0 = \dfrac{2S_cZ}{M_c}$. Montrer ainsi que $\underline{p_{rm}} = \dfrac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} p_{im}$.

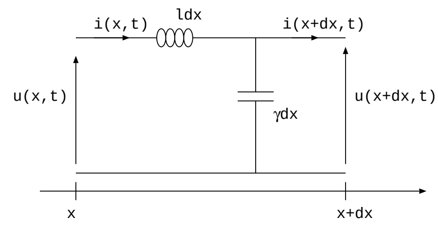
On définit les coefficients complexes de réflexion $\underline{r} = \dfrac{\underline{p_{rm}}}{p_{im}}$ et $\underline{\tau} = \dfrac{\underline{p_{tm}}}{p_{im}}$

10. Exprimer les coefficients $\underline{r}$ et $\underline{\tau}$ en fonction de ω et ω_0. La cloison se comporte comme un filtre. Préciser la nature de ce filtre.

Réponses: Les ondes sont en $e^{j(\omega t \pm kx)}$ *5-* $\underline{a} = -\omega^2 X_m e^{j\omega t}$ *7-* $-\omega^2 M_c X_m = (p_{im} + \underline{p_{rm}} - \underline{p_{tm}})S_c$ *8-* $p_{im} - \underline{p_{rm}} = \underline{p_{tm}} = j\omega Z X_m$.

III. **Propagation dans un câble coaxial**

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $l.dx$ et d'une capacité $\gamma.dx$.



1. Déduire de l'application d'une loi des noeuds et d'une loi des mailles que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ vérifient les équations différentielles $\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -\gamma\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -l\frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$.

2. Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ sont solutions d'une équation de d'Alembert (indication : pour toute fonction $y(x,t)$ on a $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial y}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial y}{\partial t})$). Quelle est la vitesse de propagation des ondes ? Vérifier l'homogénéité du résultat.

3. Une onde de la forme $u(x,t) = u_0\cos(\omega t - kx)$ se propage dans le câble. En remplaçant $u(x,t)$ dans l'équation d'onde trouvée précédemment déterminer la relation entre k et ω. Donner l'expression de $i(x,t)$ en utilisant une des équations obtenues dans la question 1.

On définit l'impédance de la ligne par $Z = \frac{u(x,t)}{i(x,t)}$ pour l'$OPPH^+$. Exprimer Z en fonction des données.

Comment s'écrit le rapport $\frac{u(x,t)}{i(x,t)}$ pour une $OPPH^-$?

Réponses : 2- $c = \frac{1}{\sqrt{l\gamma}}$ 3- relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}$ et $Z = \sqrt{\frac{l}{\gamma}}$