

DS 6 de physique

Calculatrices interdites

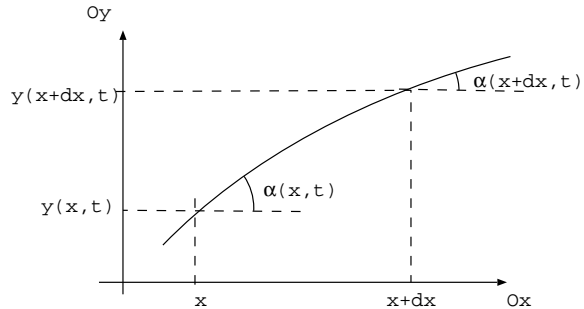
Le sujet comprend trois problèmes indépendants à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroter les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages.

Il est demandé un effort de présentation (tirer un trait entre chaque question et encadrer les résultats) et de rédaction (prendre soin de nommer les lois utilisées, les hypothèses pour les appliquer et expliquer clairement).

I. Pression de radiation

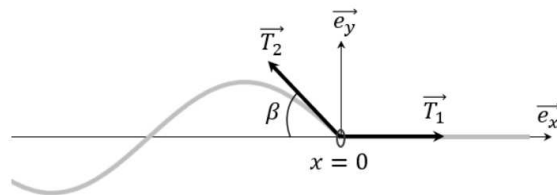
Réflexion sur une corde

Une corde vibrante au repos de masse linéique μ est tendue avec la tension de norme $T(x)$. En négligeant l'effet de la pesanteur, on considère la corde horizontale le long de l'axe Ox . On s'intéresse aux petits mouvements transversaux. Le point de la corde d'abscisse x au repos se déplace à l'instant t de $y(x, t)$ selon l'axe Oy . On considère des petits mouvements, c'est-à-dire que l'angle α que fait la tangente de la corde avec l'horizontale est petit.



- Démontrer la relation entre $\alpha(x, t)$ et une dérivée partielle de $y(x, t)$.
- A l'aide du principe fondamental de la dynamique appliqué au bout de corde compris entre x et $x + dx$, montrer que la norme de la tension est uniforme le long de la corde et montrer que $y(x, t)$ vérifie une équation de la forme $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$. Exprimer c en fonction des données.

On fixe un point de la corde à l'aide d'un petit anneau de diamètre intérieur égal au diamètre de la corde. Cet anneau est maintenu dans une position fixe en $x = 0$. Au niveau de l'anneau, les ondes se réfléchissent. En l'absence d'onde, la force exercée par la corde sur l'anneau est nulle. Lorsqu'une onde transversale se propage le long de la corde, la corde exerce des forces \vec{T}_1 et \vec{T}_2 respectivement à gauche et à droite sur l'anneau. Les normes de ces forces sont identiques ($\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = T$).



- Exprimer la force \vec{F} exercée par la corde sur l'anneau en fonction de la tension de la corde T et de l'angle β entre \vec{T}_2 et l'horizontale (β est un angle non orienté et positif).

Justifier alors que cette force s'exprime en fonction de la dérivée partielle de $\frac{\partial y}{\partial x}(x = 0^-)$ (en faisant un DL au second ordre en β) comme $\vec{F} = \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}(x = 0^-) \right)^2 \vec{e}_x - T \frac{\partial y}{\partial x}(x = 0^-) \vec{e}_y$.

Soit une onde sinusoïdale progressive incidente solution de l'équation (1): $y_i(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$.

L'onde incidente se réfléchit sur l'anneau en $x = 0$ et donne naissance à une onde réfléchie de la forme:

$$y_r(x, t) = -A \sin(\omega t + kx).$$

- Rappeler (sans démonstration) la relation entre les grandeurs suivantes : célérité de l'onde c , pulsation de l'onde ω et la norme du vecteur d'onde k .

- Donner l'expression de l'onde résultante pour les $x < 0$. Préciser alors le type d'onde qui en résulte.

Donnée: $\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

6. Déterminer la projection de la force sur l'axe Ox dans le cas d'une telle onde. Déterminer alors l'expression de sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{F} \cdot \vec{e}_x \rangle$.

On donne la densité linéique d'énergie (énergie par unité de longueur de corde): $\epsilon(x, t) = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$.

7. Donner la signification physique des deux termes qui figurent dans cette expression. Relier la moyenne spatiale de l'énergie linéique de l'onde résultante à l'expression de la valeur moyenne de la projection sur l'axe Ox de la force exercée par la corde sur l'anneau.

Dans ce cas, on définit la pression de radiation comme $P_{rad} = \frac{\langle \vec{F} \cdot \vec{e}_x \rangle}{S}$ avec S la section de la corde. En divisant la moyenne spatiale de cette énergie linéique de l'onde par la section de la corde, on trouve l'énergie volumique de l'onde. On trouve alors un résultat général entre la pression de radiation et la densité volumique moyenne d'énergie des ondes dans tous les domaines: électromagnétisme, acoustique,...

Onde acoustique

Suite à la vérification de l'existence d'une pression de radiation en électromagnétisme, son analogue acoustique a été recherché par les physiciens. La pression de radiation acoustique a alors fait l'objet de nombreux travaux théoriques et expérimentaux. Cette pression déforme notamment l'interface entre deux milieux comme on peut le voir sur l'image suivante.

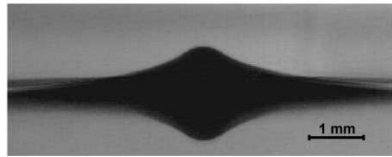


Image 3 - Déformation de l'interface eau-air par la pression de radiation acoustique
Source : thèse de B. Issenmann sur la déformation d'interfaces fluides par la pression de radiation acoustique, 2008

L'air est assimilé à un gaz parfait, initialement au repos et qui en l'absence de toute perturbation possède une masse volumique ρ_0 , une pression P_0 et une température T_0 uniformes. On étudie la propagation d'onde plane de célérité c selon l'axe Ox . Le passage de l'onde perturbe l'équilibre. On définit les grandeurs suivantes en un point d'abscisse x à l'instant t :

- la pression $P(x, t) = P_0 + p_1(x, t)$ pression acoustique telle que $|p_1(x, t)| \ll P_0$
- la masse volumique $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_1(x, t)$ avec $|\rho_1(x, t)| \ll \rho_0$
- la projection de la vitesse particulière sur l'axe Ox , $v(x, t) = 0 + v_1(x, t)$ avec $|v_1(x, t)| \ll c$.

On note χ_S le coefficient de compressibilité isentropique.

8. Établir l'équation linéarisée de conservation de la masse dans le cas d'une propagation unidirectionnelle selon Ox en fonction de ρ_0 , $\rho_1(x, t)$ et $v_1(x, t)$.

9. Écrire la loi linéarisée de la conservation de la quantité de mouvement dans le cas d'une propagation unidirectionnelle selon Ox en fonction de ρ_0 , $v_1(x, t)$ et $p_1(x, t)$.

10. Donner l'équation isentropique linéarisée reliant ρ_1 , ρ_0 , χ_S et p_1 .

11. En déduire que la surpression vérifie une équation de la forme $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$. Exprimer c en fonction des données.

On étudie une onde plane progressive harmonique d'expression $p_1(x, t) = p_{10} \cos(\omega t - kx)$ provenant des $x < 0$. Un obstacle est présent en $x = 0$.

12. Expliquer pourquoi la pression acoustique ne permet pas d'expliquer le phénomène de pression de radiation sur l'obstacle.

On propose d'utiliser l'égalité citée précédemment selon laquelle la pression de radiation est égale à la moyenne temporelle de l'énergie volumique de l'onde. On donne la densité volumique d'énergie d'une onde acoustique: $e(x, t) = \frac{\rho_0}{2} v_1(x, t)^2 + \frac{\chi_S}{2} p_1(x, t)^2$.

13. Donner la signification physique des deux termes qui figurent dans cette expression.. Dans le cas de l'onde plane progressive incidente $p_1(x, t)$, montrer que $e(x, t)$ peut s'écrire $e(x, t) = \chi_S p_1(x, t)^2$.

14. En considérant l'onde réfléchie sur l'obstacle d'expression $p_{10} \cos(\omega t + kx)$, déterminer la densité volumique d'énergie de l'onde totale (incidente et réfléchie). En déduire l'expression de la pression de radiation

acoustique en fonction de χ_S et p_{10} .

On souhaite maintenant vérifier expérimentalement cette formule.

On réalise le protocole suivant : on émet une onde ultrasonore avec un émetteur d'ultrason fonctionnant à une fréquence de 40 kHz . Le générateur basse fréquence alimente l'émetteur en tension sinusoïdale d'amplitude U_e . On considère que l'amplitude de la pression acoustique de l'onde ultrasonore est proportionnelle à U_e . On place l'émetteur face à une balance de précision comme le précise la photo ci-dessous.

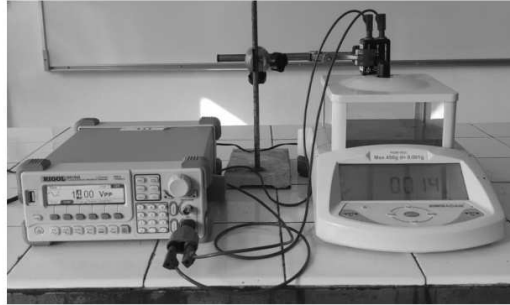


Image 4 - Expérience de la mesure de la pression de radiation acoustique

En présence d'une onde ultrasonore, la balance affiche une masse m . La masse indiquée donne une mesure de la force exercée par la pression de radiation sur le plateau de la balance. On fixe la distance entre l'émetteur et la balance (3 cm). On mesure alors la masse m en faisant varier l'amplitude U_e . On obtient les résultats suivants :

U_e (V)	4	4,5	5	6	6,5	7	8	8,5	9	9,5	10
m (mg)	5	6	7	10	11	14	17	19	21	23	26

15. À partir des données de l'expérience, démontrer que celles-ci sont compatibles avec le résultat de la question précédente. Une analyse graphique est attendue.

II. Instruments de musique

Cet exercice étudie certains instruments à percussion tels que le xylophone, le marimba ou le glockenspiel. Ils sont formés de lames parallélépipédiques de bois ou de métal. Chacune d'elles produit, lorsqu'on la frappe avec une baguette, un son de hauteur déterminée.

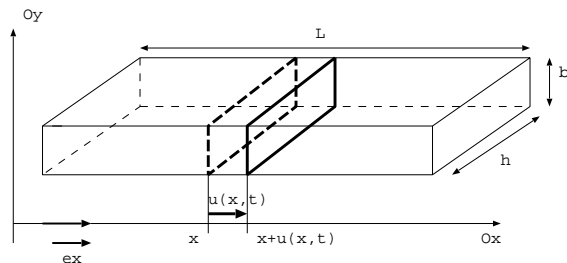
Glockenspiel



Marimba



On envisage les vibrations longitudinales d'une lame de longueur L . La matière située au repos dans le plan d'abscisse x se met en mouvement suite à une excitation. Elle occupe à l'instant t le plan de la matière $x + u(x, t)$ et est soumise, de la part de la matière située à **sa droite**, à une force $\vec{F}_d = F(x, t)\vec{e}_x$.



On note ρ la masse volumique et E le module d'Young du matériau dont on rappelle la définition : pour porter de l_0 à $l_0 + \delta l$ la longueur d'une tige de section S , il faut exercer sur ses extrémités une force égale à $ES\frac{\delta l}{l_0}$.

Données:

	bronze	acier
ρ (SI)	9000	8000
E (SI)	$10,0 \cdot 10^{10}$	$16,10 \cdot 10^{10}$

1. On considère le système infinitésimal compris entre x et $x + dx$ au repos. En présence d'une perturbation, la tranche en x s'est déplacée de $u(x, t)$ et la tranche en $x + dx$ s'est déplacée de $u(x + dx, t)$. Montrer que son allongement relatif s'écrit $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$. Que signifie physiquement le cas où $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) > 0$?
2. En déduire que $\vec{F}_d(x, t) = +ES \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \vec{e}_x$.
3. Dans cette barre la vitesse de propagation des ondes est de la forme $c = E^\alpha \rho^\beta$. Déterminer par une analyse dimensionnelle les valeurs numériques de α et β . Commenter le résultat.
4. Déduire de l'application du PFD au système infinitésimal compris entre x et $x + dx$ l'équation de propagation vérifiée par $u(x, t)$. Rappeler sans démonstration la relation de dispersion.
5. On recherche des solutions de la forme $u(x, t) = u_0 \sin(kx + \phi) \sin(\omega t)$. De quel type de solution s'agit-il? Justifier ce choix.
6. Les deux extrémités de la barre en $x = 0$ et en $x = L$ sont fixes soit immobiles. Déterminer la valeur de ϕ et les valeurs possibles pour k_n ainsi que les valeurs possibles pour la longueur d'onde λ_n et la fréquence f_n de l'onde. Représenter l'onde dans le mode fondamental et pour le premier harmonique.
7. On dispose de deux lames de glockenspiel de même longueur, l'une en acier et l'autre en bronze. Laquelle joue des notes plus graves? Justifier votre réponse. Donnée: $\sqrt{2} = 1,4$.
8. Une lame de glockenspiel en acier de longueur $L = 20,0 \text{ cm}$ émet un son de fréquence égale à 600 Hz . Montrer qu'il ne peut pas résulter de l'excitation d'une onde longitudinale.

Les fréquences émises s'expliquent par les petits mouvements transversaux de la lame. On note $y(x, t)$ les petits déplacements verticaux au point d'abscisse x à l'instant t et on admet que $y(x, t)$ vérifie l'équation de propagation:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) + \frac{c^2 b^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) = 0$$

où b est la dimension de la lame selon l'axe Oy .

9. On recherche des solutions de la forme $y(x, t) = y_0 \sin(kx + \phi) \sin(\omega t)$. Déterminer la relation de dispersion entre k et ω pour ces ondes.
10. Lorsque la lame est fixe à ses deux extrémités, montrer que les fréquences possibles s'écrivent $f_n = n^2 \frac{\pi c b}{4\sqrt{3}L^2}$.

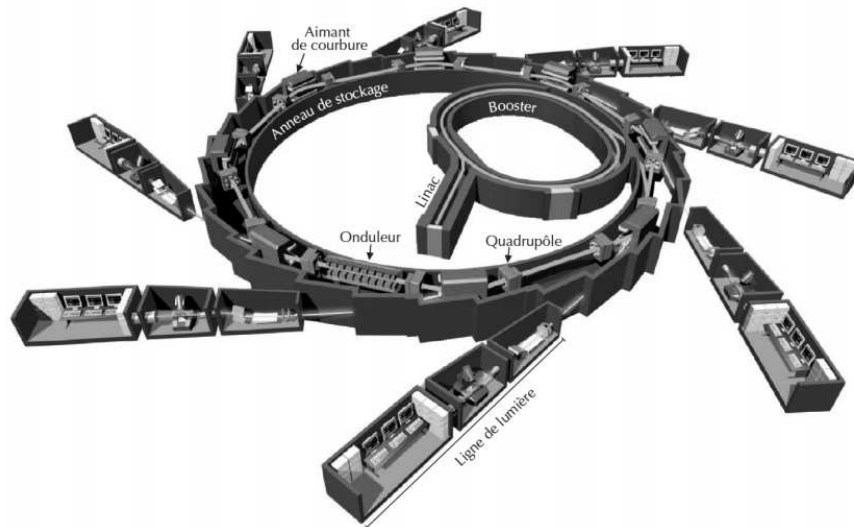
III. Etude du synchrotron SOLEIL

Un synchrotron est un instrument électromagnétique de grande taille destiné à l'accélération de particules chargées. Le rayonnement synchrotron est un rayonnement électromagnétique émis par une particule chargée possédant une accélération. Ce rayonnement est utilisé pour des analyses physiques. Dans le synchrotron SOLEIL, situé à Saclay, des électrons, de masse notée m_e et de charge $-e$, accélérés à une vitesse proche de celle de la lumière, sont déviés par des champs magnétiques.

Données	
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 5,1 \cdot 10^2 \text{ keV}/c^2$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Valeur de l'électron-volt	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Constante de Planck	$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante molaire des gaz parfaits	$R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Bien que les données soient fournies avec deux chiffres significatifs, les résultats numériques calculés seront fournis, sauf indication contraire, avec UN SEUL chiffre significatif.

On donne le schéma général du synchrotron SOLEIL (Figure 1):



Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie I : généralités

Des électrons non-relativistes, émis sans vitesse initiale, sont accélérés linéairement par un champ électrostatique uniforme et unidirectionnel $\vec{E} = E\vec{e}_x$.

1. Rappeler la relation qui lie le champ électrostatique au potentiel électrostatique V . Donner le sens physique de cette relation et en déduire l'énergie potentielle électrostatique de l'électron en fonction de e et de V .

2. Calculer la différence de potentiel nécessaire pour obtenir une énergie cinétique finale $E_c = 1,0 \text{ keV}$. Justifier.

3. Dans la zone nommée Linac du synchrotron SOLEIL (voir figure 1), les électrons sont accélérés jusqu'à une énergie cinétique $E_c = 100 \text{ MeV}$. Calculer leur vitesse v et en déduire que cet électron est relativiste et sa vitesse ne peut donc pas être calculée à l'aide de la forme de l'énergie cinétique utilisée en mécanique classique.

4. Les électrons étant relativistes, leur énergie cinétique s'écrit : $E_c = (\gamma - 1)m_e c^2$ où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ est appelé facteur de Lorentz de l'électron. Calculer ce facteur. En déduire la vitesse approchée de ces électrons.

Les électrons sont ensuite accélérés jusqu'à $E_c = 2,7 \text{ GeV}$ grâce à un autre accélérateur nommé booster, puis libérés dans l'anneau de stockage. Leur vitesse est alors assimilable à celle de la lumière.

5. L'intensité du courant circulant dans l'anneau de stockage, assimilé à un cercle de rayon $R = 57 \text{ m}$, vaut à un instant donné $i = 0,43 \text{ A}$. Evaluer le temps mis par un électron pour parcourir l'anneau de stockage et en déduire la charge totale circulant dans l'anneau et le nombre d'électrons N constituant le faisceau.

6. Le vide dans l'anneau de stockage n'est pas parfait, il subsiste principalement du dihydrogène, sous une pression $P = 6.10^{-13} \text{ bar}$. En utilisant un modèle connu, calculer la densité particulaire n^* du gaz résiduel à $T = 298 \text{ K}$.

Les chocs entre les N électrons d'un faisceau et les molécules de gaz résiduel fait varier le nombre d'électrons du faisceau. Pour une longueur dx de parcours, cette variation s'écrit: $dN = -\sigma n^* N dx$.

7. Justifier dimensionnellement le nom de "section efficace" donné au coefficient σ .

8. En raison de ces chocs, le faisceau a une durée de vie τ , définie comme la durée pour laquelle le nombre N d'électrons a diminué de 37,8 %. Montrer que $N(t)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{dN}{dt} + n^* \sigma c N = 0$. En déduire τ en fonction de σ , n^* et c .

9. On considère $\sigma = 2,0.10^{-23} \text{ cm}^2$ dans le synchrotron. Calculer la durée de vie du faisceau. On donne $\ln(0,63) = -0,46$.

Partie II: éléments magnétiques

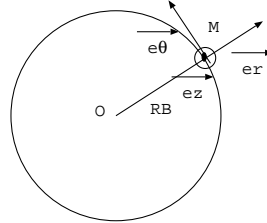
L'anneau de stockage n'est pas rigoureusement circulaire: il est constitué de portions linéaires et d'éléments magnétiques qui sont des dipôles, des quadrupôles et des sextupôles.

10. Donner le nom de l'effet qui permet de mesurer un champ magnétique au laboratoire.

Les dipôles sont des aimants servant à courber la trajectoire des électrons. On considère une base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Un dipôle crée un champ magnétique vertical supposé uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ avec $B_0 > 0$.

11. On considère un électron non relativiste pénétrant avec une vitesse de norme v_0 . Justifier le fait que la norme de la vitesse est constante.

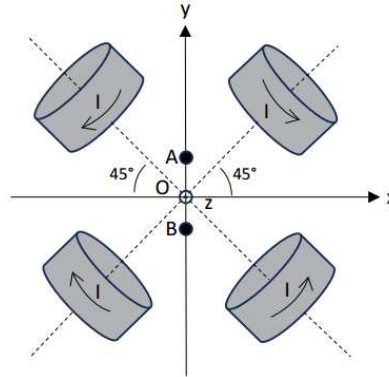
On admet que la trajectoire est circulaire de rayon R_B . Reproduire le schéma ci-contre et ajouter sur ce schéma, le champ magnétique, la vitesse de l'électron placé en M et la force magnétique. Montrer que l'on a $B_0 = \frac{p}{eR_B}$ (relation 1) où p est la quantité de mouvement de l'électron.



Exprimer la pulsation ω_B de l'électron sur sa trajectoire.

12. La relation (1) reste valable dans le cadre de la relativité restreinte, avec une norme de la quantité de mouvement voisine de $p \approx \frac{E_c}{c}$. Calculer la valeur du champ magnétique permettant d'obtenir un rayon $R_B = 5,4 \text{ m}$ pour la trajectoire. On rappelle que dans l'anneau de stockage $E_c = 2,7 \text{ GeV}$.

Les inhomogénéités de vitesse du paquet d'électrons entraînent une divergence du faisceau d'électrons, qui doit donc être focalisé. On utilise pour cela des quadrupôles, composés de quatre bobines disposées en carré (figure 2).



Le champ magnétique créé par les quatre bobines peut s'écrire au voisinage de l'origine:

$$\vec{B} = Ky\vec{e}_x + Kx\vec{e}_y \text{ où } K \text{ est une constante positive}$$

13. On considère un faisceau d'électrons de vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_z$ avec $v_0 > 0$ possédant une faible extension $\Delta y > 0$ autour de l'origine. Sur un schéma, dessiner le champ magnétique et la force exercée sur un électron au point $A(0, \Delta y/2, 0)$ et sur un électron au point $B(0, -\Delta y/2, 0)$ (les points A et B sont représentés sur la figure 2). En déduire que le faisceau est refocalisé au voisinage de l'origine grâce au quadrupôle.

14. Montrer en faisant un schéma analogue à celui de la question précédente que le faisceau d'électrons de vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_z$ avec $v_0 > 0$ possédant une extension $\Delta x > 0$ autour de l'origine sera cette fois défocalisé.

Pour pallier à cet inconvénient, et corriger la trajectoire des électrons, il faudra ajouter des quadrupôles et des sextupôles.