Chapitre EM 4 : théorème de Gauss et applications

I. Densité volumique de charges

Les charges sont réparties dans des volumes (noyau, atome, molécules, armatures d'un condensateur,...). On définit ρ, la densité volumique de charges par:

ρ est un nombre positif ou négatif en fonction du signe des charges d'unité:

Quand ρ est donnée on peut calculer la charge contenue dans un volume:

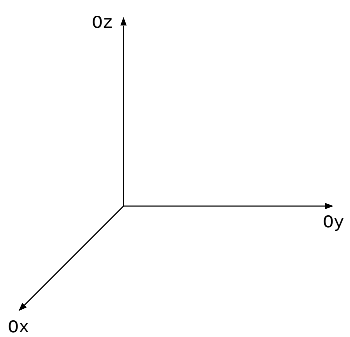
Pour une répartition non uniforme de charges:

Pour une répartition uniforme de charges:

Au sujet des volumes élémentaires:

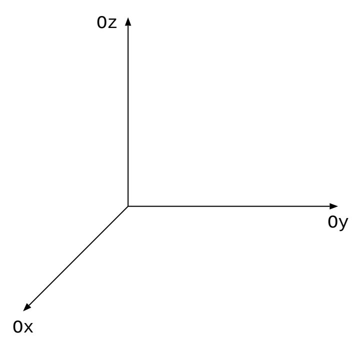
En coordonnées cartésiennes, le volume élémentaire s'écrit:

Coordonnées cylindriques



.

Coordonnées sphériques



.

Au sujet des volumes:

Volume d'une sphère de rayon R:

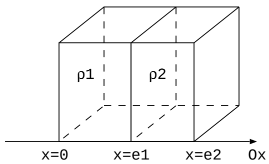
Volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h:

Exemples

Soit une sphère de rayon R et de densité volumique de charges ρ_0 uniforme à l'intérieur de la sphère et nulle à l'extérieur de la sphère. Exprimer la charge Q de cette sphère.

Soit un cylindre de rayon R, de hauteur h et de densité volumique de charges ρ_0 uniforme à l'intérieur du cylindre et nulle à l'extérieur du cylindre. Exprimer la charge Q dans le cylindre.

Soit deux pavés d'épaisseurs e_1 et e_2 et de section S. On définit la densité volumique de charges par: $\rho(x < 0) = 0$, $\rho(0 < x < e_1) = \rho_1$, $\rho(e_1 < x < e_2) = \rho_2$ et $\rho(x > e_2) = 0$. Donner la relation entre ρ_1 et ρ_2 (uniformes) pour que la charge totale soit nulle.



Soit une sphère de centre O, de rayon R et de charge $+Q$ uniformément répartie dans son volume. Exprimer la charge Q_1 contenue dans la sphère de même centre O et de rayon $R_1 < R$.

Exercice: soit une sphère de rayon a_0 de densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0(1 - \dfrac{r}{a_0})$ en coordonnées sphériques (ρ_0 constante positive). Calculer la charge totale contenue dans cette sphère.

II. **Théorème de Gauss**

On admet que le champ électrique vérifie les équations locales:

.

Méthode d'application: le théorème de Gauss sert à trouver le champ électrique créé par une distribution de charges à forte symétrie (sphère, cylindre infini et parallélépipède infini). Il s'applique en trois étapes:

Etape 1 : On choisit, pour repérer M, un système de coordonnées sphériques, cylindriques ou cartésiennes, adapté aux symétries de la distribution

On prévoit la direction du champ électrique en M grâce aux plans de symétrie présents passant par M.

On prévoit les variables du champ électrique grâce aux invariances présentes.

Etape 2 : On choisit une surface de Gauss qui passe par M et qui respecte les symétries (concrètement cette surface doit être perpendiculaire à $\overrightarrow{E}$ ou tangente à $\overrightarrow{E}$ en tout point).

On calcule le flux sortant du champ électrique à travers la surface de Gauss.

Etape 3 : On calcule la charge intérieure contenue dans la surface de Gauss, on est souvent amené à considérer deux cas suivant que M est à l'extérieur ou à l'intérieur du volume qui contient les charges. On **fait** un dessin pour visualiser les charges présentes et les charges intérieures à la surface de Gauss.

On applique le théorème. On obtient l'expression du champ électrique qui est défini par morceaux (exemple dans le cas d'une sphère chargée: le champ électrique à l'intérieur et celui à l'extérieur de la sphère n'ont pas la même expression).

On déduit le potentiel de l'équation locale $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$. On trouve les constantes d'intégration en écrivant que le potentiel est **continu** et que loin des charges le potentiel est nul (attention: cette condition ne s'applique pas lorsqu'il y a des charges à l'infini, par exemple dans le cas de charges réparties entre deux plans infinis, ou dans le cas où les charges sont réparties sur un cylindre infini... Dans ces situations, l'énoncé doit donner la valeur du potentiel en un point pour trouver la constante d'intégration).

La suite du chapitre est consacrée à la détermination du champ électrique et du potentiel électrique par application du théorème de Gauss pour les distributions de charges suivantes:

- Une sphère de centre O, de rayon R, de charge Q, chargée uniformément en volume

- Une sphère de centre O, de rayon R, de charge Q, chargée uniformément en surface

- Un cylindre de rayon R, d'axe Oz et de longueur $l >> R$ (ce cylindre est considéré de longueur infini), de charge Q uniformément chargé en volume

- Un parallélépipède de section S compris entre les plans $z = -e/2$ et $z = e/2$ chargé uniformément en volume