TD conduction électrique

I. **Densité volumique d'électrons**

On cherche le nombre d'atomes d'aluminium par unité de volume soit $n^*_{Al} = \dfrac{N_{Al}}{V} = \dfrac{n_{Al}\mathcal{N}_a}{V} = \dfrac{m_{Al}\mathcal{N}_a}{VM} = \dfrac{\mu\mathcal{N}_a}{M} = 6,0.10^{28}\ atomes.m^{-3}$ (attention: $M = 27.10^{-3}\ kg.m^{-3}$).

Chaque atome libère trois électrons de conduction donc $n^* = 3n^*_{Al} = 1,8.10^{29}\ electrons.m^{-3}$.

On utilise $\overrightarrow{j} = n^*(-e)\overrightarrow{v}$ soit $v = \dfrac{j}{n^*e} = \dfrac{I}{Sn^*e} = \dfrac{I}{\pi R^2 n^* e} = 6,6\ \mu m.s^{-1}$.

II. **Intensité dans un câble**

On a $I = \iint \overrightarrow{j}\, dS\overrightarrow{n} = \iint jdS$ où S est la surface traversée par le courant soit la surface d'un disque. On ne peut pas sortir j de l'intégrale car il n'est pas uniforme. Un point M sur le disque est repéré par r et θ soit $dS = drrd\theta$.

On a donc $I = j_0 \displaystyle\int_0^R (1 - \frac{r}{R})rdr \int_0^{2\pi} d\theta = j_0[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}]_0^R 2\pi = 2\pi j_0(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3}) = \frac{\pi j_0 R^2}{3}$.

III. **La foudre**

1. L'intensité est le débit de charges soit $I = \dfrac{dq}{dt}$ où dq est la charge qui traverse la section du conducteur pendant dt.

La charge totale mise en jeu au cours de la foudre est $|Q| = I\Delta t = 1250\, C$, on en déduit le nombre d'électrons par $N = \dfrac{|Q|}{e} = 7,8.10^{21}\ e^-$.

2. La conductivité intervient dans la loi d'Ohm: $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$ soit en norme $j = \gamma E$ et $\gamma = \dfrac{j}{E}$ avec $j = \dfrac{I}{S} = \dfrac{I}{\pi(d/2)^2} = 7,07.10^8\ A.m^{-2}$. AN: $\gamma = \dfrac{7,07.10^8}{20\ 000} = 3,5.10^3\ S.m^{-1}$.

3. La résistance d'un cable de conductivité γ, de longueur l et de section $S = \pi(d/2)^2$ est $R = \dfrac{l}{\gamma S}$. AN: $R = 200\ \Omega$.

La puissance dissipée par effet Joule est $P = RI^2$, l'énergie est $E_J = RI^2\Delta t = 1,25.10^{10}\ J$.

IV. **Modèle de Drude**

1. On cherche le nombre d'atomes de plomb par unité de volume soit $n^*_{Pb} = \dfrac{N_{Pb}}{V} = \dfrac{n_{Pb}\mathcal{N}_a}{V} = \dfrac{m_{Pb}\mathcal{N}_a}{VM} = \dfrac{\rho\mathcal{N}_a}{M} = 3,3.10^{28}\ atomes.m^{-3}$ (j'ai noté N_{Pb}, le nombre d'atomes de plomb dans le volume V, n_{Pb}, le nombre de moles dans le volume V et m_{Pb}, la masse de plomb dans le volume V).

Chaque atome libère deux électrons de conduction donc $n^* = 2n^*_{Pb} = 6,6.10^{28}\ electrons.m^{-3}$.

2. On utilise $\overrightarrow{j} = n^*(-e)\overrightarrow{v}$ soit $v = \dfrac{j}{n^*e} = \dfrac{I}{Sn^*e} = \dfrac{I}{\pi R^2 n^* e} = 60\ \mu m.s^{-1}$.

3. On applique $\overrightarrow{j} = n^*(-e)\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v}$ qui est la vitesse limite atteinte par les électrons sous l'action de la force électrique et de la force de frottements soit $-e\overrightarrow{E} - \dfrac{m}{\tau}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ donne $\overrightarrow{v} = -\dfrac{e\tau}{m}\overrightarrow{E}$.

On a donc $\overrightarrow{j} = n^*(-e)\overrightarrow{v} = \dfrac{n^*e^2\tau}{m}\overrightarrow{E} = \gamma\overrightarrow{E}$ donc $\gamma = \frac{n^*e^2\tau}{m} = 1,9.10^3\ S.m^{-1}$.

V. **Résistance d'un conducteur**

On applique la loi d'Ohm locale $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$ soit en norme $j = \gamma E$.

On a $I = jS = jab$ (S surface perpendiculaire à I et $\overrightarrow{j}$)

On a aussi $E = \dfrac{U}{L}$

On en déduit $\dfrac{I}{ab} = \gamma \dfrac{U}{L}$ soit $U = \dfrac{L}{\gamma ab} I$ de la forme $U = RI$ (loi d'Ohm intégrale) soit $R = \dfrac{L}{\gamma ab}$.

La puissance cédée par le champ électrique pour mettre les charges en mouvement est $P = \iiint \vec{j}.\vec{E} d\tau = \iiint \dfrac{j^2}{\gamma} d\tau = \iiint \dfrac{I^2}{(ab)^2\gamma} d\tau = \dfrac{I^2}{(ab)^2\gamma} \iiint d\tau = \dfrac{I^2}{(ab)^2\gamma} abL = \dfrac{L}{\gamma ab} I^2 = RI^2$: on conclut que la puissance cédée par le champ électrique est entièrement perdue par effet Joule.

VI. **Effet Joule dans un conducteur sphérique**

1. I est le flux de $\vec{j}(r)$ à travers la sphère de rayon r soit $I = j(r)4\pi r^2$ donc $\vec{j} = \dfrac{I}{4\pi r^2}\vec{e_r}$.

On applique la loi d'Ohm: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ soit $\vec{E} = \dfrac{\vec{j}}{\gamma} = \dfrac{I}{4\pi r^2 \gamma}\vec{e_r}$.

2. On a $d\tau = dr d\theta r \sin\theta d\phi$.

La puissance donnée par le champ électrique aux charges pour les mettre en mouvement est $P = \iiint \vec{j}.\vec{E} d\tau = \iiint \gamma j(r)^2 d\tau = \iiint \dfrac{I^2}{\gamma 16\pi^2 r^4} r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = \dfrac{I^2}{\gamma 16\pi^2} \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{dr}{r^2} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \dfrac{I^2}{\gamma 16\pi^2}(\dfrac{-1}{b} + \dfrac{1}{a})4\pi = \dfrac{I^2}{\gamma 4\pi}\dfrac{b-a}{ab}$ de la forme RI^2 donc $R = \dfrac{b-a}{\gamma 4\pi ab}$.

VII. **Résistance d'un conducteur cylindrique**

1. Soit le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$. On est en régime stationnaire donc la charge à l'intérieur du système est constante soit la charge qui entre est égale à la charge qui sort soit $j(r)2\pi rhdt = j(r+dr)2\pi(r+dr)hdt$ donne $I(r) = I(r+dr)$ donc I ne dépend pas de r.

2. $I = j(r)2\pi rh$ soit $j(r) = \dfrac{I}{2\pi rh}$.

D'après la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ soit $\vec{E} = \dfrac{\vec{j}}{\gamma} = \dfrac{j(r)}{\gamma}\vec{e_r} = \dfrac{I}{2\pi rh\gamma}\vec{e_r}$.

3. On applique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\dfrac{dV}{dr}\vec{e_r} = \dfrac{I}{2\pi rh\gamma}\vec{e_r}$.

donc $\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{I}{2\pi rh\gamma}$ soit $V(r) = -\dfrac{I}{2\pi h}\ln r + A$. On en déduit la tension $U = V(r = R_1) - V(R_2) = -\dfrac{I}{2\pi h}\ln R_1 + A + \dfrac{I}{2\pi h}\ln R_2 - A = \dfrac{I}{2\pi h}\ln(\dfrac{R_2}{R_1})$ de la forme $U = RI$ soit $R = \dfrac{1}{2\pi h}\ln(\dfrac{R_2}{R_1})$.

VIII. **Tension de pas**

1. L'intensité I traverse la demi sphère de rayon r soit $I = -j(r)2\pi r^2$ (le signe $-$ est présent car I et $\vec{j}$ sont de sens opposés) soit $j(r) = \dfrac{-I}{2\pi r^2}$.

2. On applique la loi d'Ohm $\vec{E} = \dfrac{\vec{j}}{\gamma} = \dfrac{-I}{\gamma 2\pi r^2}\vec{e_r}$.

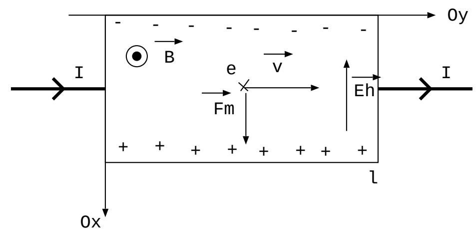
3. On applique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\dfrac{dV}{dr}\vec{e_r} = \dfrac{-I}{\gamma 2\pi r^2}\vec{e_r}$ d'où $\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{I}{\gamma 2\pi r^2}$ donc $V(r) = -\dfrac{I}{\gamma 2\pi r} + C$ où C est une constante d'intégration.

On en déduit la tension entre les deux pattes de la vache: $U = V(r = d + p/2) - V(r = d - p/2) = -\dfrac{I}{\gamma 2\pi(d+p/2)} + \dfrac{I}{\gamma 2\pi(d-p/2)} = \dfrac{Ip}{2\pi\gamma(d^2 - (p/2)^2} \approx \dfrac{Ip}{2\pi\gamma d^2}$.

4. On applique la loi d'Ohm intégrale au corps de la vache: $U = Ri$ où i est l'intensité du courant dans la vache soit $U = \dfrac{Ip}{2\pi\gamma d^2} = Ri$ donc $i = \dfrac{Ip}{2\pi\gamma d^2 R} < i_{max}$ donne $d > \dfrac{I}{2\pi\gamma R i_{max}}$ pour que la vache ne s'électrocute pas.

IX. **Effet Hall**

1. Ici ce sont des charges positives qui assurent le passage du courant et les charges positives se déplacent dans le sens de $\overrightarrow{j}$. Elles subissent la force magnétique $\overrightarrow{F_m} = e\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{B} = ev\overrightarrow{e_y}\Lambda B\overrightarrow{e_z} = evB\overrightarrow{e_x}$. Les charges positives s'accumulent sur la face en $x = a$ et par manque de charges positives il y a accumulation de charges négatives sur la face en $x = 0$. Il apparaît un champ électrique dirigé des charges + vers les charges − soit dirigé selon $-\overrightarrow{e_x}$.



2. Selon Ox les charges subissent deux forces: la force magnétique $\overrightarrow{F_m} = e\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{B}$ et la force électrique $\overrightarrow{F_e} = e\overrightarrow{E_h}$.

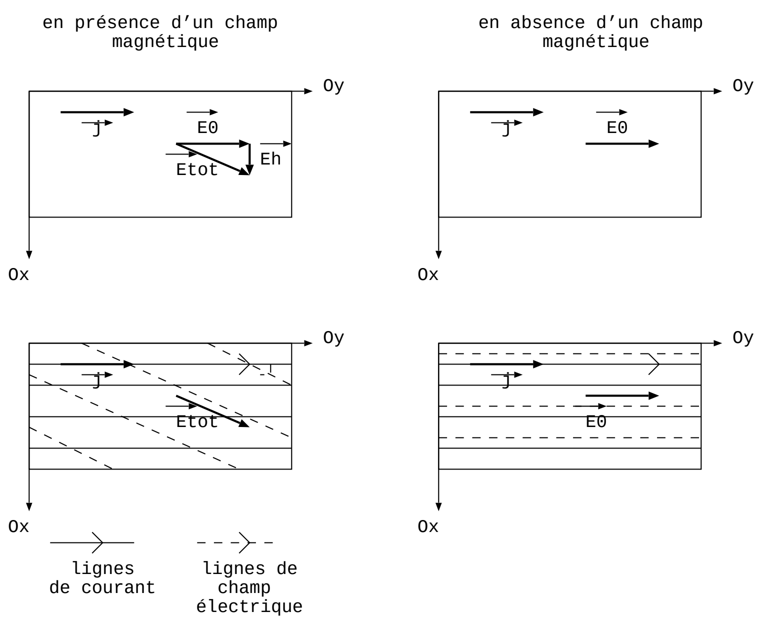
En régime stationnaire, les charges ne bougent plus selon Ox soit $\overrightarrow{F_m} + \overrightarrow{F_e} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{E_h} = -\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{B}$ avec $\overrightarrow{j} = n^*e\overrightarrow{v}$ soit $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{j}}{n^*e}$ d'où $\overrightarrow{E_h} = -\dfrac{\overrightarrow{j}}{n^*e}\Lambda\overrightarrow{B}$.

Les lignes de courant sont selon Oy (direction du courant).

Les lignes de champ électrique sont des droites dirigées par le champ électrique:

- en présence de champ magnétique, le champ électrique total est $\overrightarrow{E_0} + \overrightarrow{E_h}$ (le champ $\overrightarrow{E_0}$ est celui qui crée le courant $\overrightarrow{j}$, il est dans le même sens et même direction que $\overrightarrow{j}$).

- en absence de champ magnétique, il n'y a que le champ électrique $\overrightarrow{E_0}$: $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{E_0}$ sont colinéaires de même sens, les lignes de courant et lignes de champ électrique sont confondues.



3. On a $\overrightarrow{E_h} = -\dfrac{\overrightarrow{j}}{n^*e}\Lambda\overrightarrow{B}$ avec $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{e_y} = \dfrac{I}{ab}\overrightarrow{e_y}$ soit $\overrightarrow{E_h} = -\dfrac{I\overrightarrow{e_y}}{abn^*e}\Lambda B\overrightarrow{e_z} = \dfrac{-IB}{abn^*e}\overrightarrow{e_x}$.

Ce champ entre les armatures est de la forme $\overrightarrow{E_h} = -\dfrac{V(x=a) - V(x=0)}{a}\overrightarrow{e_x} = -\dfrac{U_h}{a}\overrightarrow{e_x}$.

On a donc $-\dfrac{U_h}{a}\overrightarrow{e_x} = \dfrac{-IB}{abn^*e}\overrightarrow{e_x}$ soit $U_h = \dfrac{IB}{bn^*e}$.

4. À la suite d'une erreur de positionnement du contact O, on mesure la tension U entre A et C ($C(x = 0, y = d, z = 0)$). Exprimer la tension $U = V_A - V_C$ en fonction de U_H, E_0 et d, puis en fonction de U_H, I, a, b et γ, conductivité du matériau.

Réponses: $U_H = \dfrac{BI}{n^*eb}$ *et* $U = U_H + \dfrac{Id}{ab\gamma}$

.