TD théorème de Gauss

I. Champ créé par un fil

Soit un cylindre d'axe Oz, de rayon négligeable, de longueur l très grande et portant une charge totale Q uniformément répartie. Déterminer le champ électrique créé par ce cylindre par application du théorème de Gauss.

Réponse: $E(r) = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l}$

II. Champ créé par un cylindre chargé en surface

Soit un cylindre de rayon R, d'axe Oz et de hauteur h portant une charge totale Q *uniformément répartie sur sa surface.* Il n'y a pas de charge dans le volume du cylindre. On néglige les effets de bord soit $h >> R$.

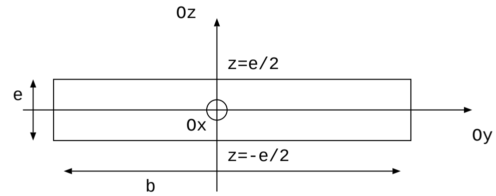
1. Déduire du théorème de Gauss les expressions de $\overrightarrow{E_+}(M)$ et $\overrightarrow{E_-}(M)$, champ électrique en M qui se trouve respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. Tracer la courbe donnant le champ électrique en fonction de r et commenter.

2. Déterminer les expressions du potentiel électrique $V_+(M)$ et $V_-(M)$ en M qui se trouve respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. On suppose que le potentiel est égal à V_0 au centre du cylindre, sur l'axe Oz.

Réponses : $\overrightarrow{E_+}(M) = \overrightarrow{0}$ *et* $\overrightarrow{E_-}(M) = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h}\overrightarrow{e_r}$, $V_+(M) = V_0$ *et* $V_-(M) = -\dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln(\dfrac{r}{R}) + V_0$.

III. Champ créé par un parallélépipède

Soit un parallélépipède de dimensions a selon Ox, b selon Oy et e selon Oz qui porte une charge $+Q$ uniformément répartie. On suppose que ce parallélépipède est très grand selon Ox et Oy soit $a, b >> e$. La densité volumique de charges est une fonction de z telle que $\rho(z) = 0$ pour $z > e/2$ *et* $z < -e/2$ et $\rho(z) = \rho_0$ (constante) pour $-e/2 < z < +e/2$.

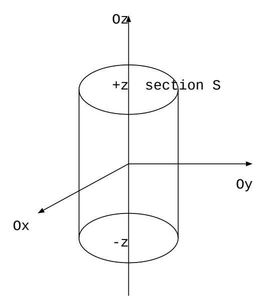


1. Montrer que le champ électrique en M s'écrit $\overrightarrow{E}(M) = E(z)\overrightarrow{e_z}$. Quelle relation a-t-on entre $\overrightarrow{E}(z)$ et $\overrightarrow{E}(-z)$?

2. On choisit pour surface de Gauss un cylindre d'axe Oz de section S compris entre $-z$ et $+z$. Exprimer le flux du champ électrique à travers ce cylindre.

3. Déduire du théorème de gauss, le champ électrique en tout point de l'espace et tracer la courbe donnant E en fonction de z.

4. Exprimer le potentiel créé par cette distribution de charges en prenant $V(z = 0) = 0$.



Réponses: $E(z) = \dfrac{\rho_0 z}{\epsilon_0}$ *et* $V(z) = -\dfrac{\rho_0 z^2}{2\epsilon_0}$ *pour* $-e/2 < z < e/2$, $E(z) = \dfrac{\rho_0 e}{2\epsilon_0}$ *et* $V(z) = -\dfrac{\rho_0 e z}{2\epsilon_0}$ *pour* $z > e/2$ *et* $E(z) = \dfrac{-\rho_0 e}{2\epsilon_0}$ *et* $V(z) = \dfrac{+\rho_0 e z}{2\epsilon_0}$ *pour* $z < -e/2$

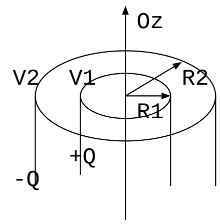
IV. Equation de Poisson

Une sphère de rayon R et de centre O porte une densité volumique de charges uniforme ρ_0. Le potentiel électrique est nul loin de la sphère et vaut V_0 au centre de la sphère. Rappeler les équations de Maxwell Faraday et de Maxwell Gauss et en déduire l'équation de Poisson. Montrer que le potentiel ne dépend que de r en coordonnées sphériques et exprimer le potentiel en tout point M. En déduire le champ électrique.

Donnée: $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial^2 r}(rV) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial V}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 V}{\partial^2\phi}$.

Réponses: $V(r < R) = -\dfrac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + V_0$ *et* $V(r > R) = \dfrac{-\rho_0 R^3}{6\epsilon_0 r} + \dfrac{V_0 R}{r}$

V. **Condensateur cylindrique**



On considère deux électrodes (ou armatures) cylindriques de même axe Oz et de rayon respectif R_1 et R_2 (de longueur $l >> R_1, R_2$) portant les charges $+Q > 0$ et $-Q$ réparties uniformément en surface. L'électrode de rayon R_1 a pour potentiel V_1 et l'électrode de rayon $R_2 > R_1$ a pour potentiel V_2.

1. Soit un point M repéré par ses coordonnées cylindriques. Faire un schéma pour représenter M, ses coordonnées et les vecteurs de base. Montrer que le champ électrique en M est de la forme $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{e_r}$.

2. On choisit pour surface de Gauss, un cylindre d'axe Oz et de rayon $r = HM$. Exprimer le flux du champ électrique à travers ce cylindre.

3. En déduire le champ électrique pour $R_1 < r < R_2$ puis la différence de potentiel $V_1 - V_2$ en fonction de Q, l, ϵ_0, R_1 et R_2.

4. Ce système constitue un condensateur cylindrique. Rappeler la relation entre sa capacité C, la charge $+Q$ et la tension à ses bornes $U = V_1 - V_2$. Déduire des questions précédentes l'expression de la capacité de ce condensateur.

5. En tout point M où règne un champ électrique, il existe une énergie électrique dont l'expression *par unité de volume* est donnée par : $u_e(M) = \dfrac{\epsilon_0 E^2(M)}{2}$. Exprimer l'énergie électrique totale U_e entre les cylindre de rayons R_1 et R_2.

Rappeler l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur en fonction de la charge Q des armatures et de sa capacité C. En déduire l'expression de la capacité du condensateur cylindrique. Vérifier la cohérence avec le résultat précédent.

Réponse: $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$

VI. **Répartition non uniforme de charges**

Soit une sphère de rayon a_0 et de centre O qui porte la densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0(1 - \dfrac{r}{a_0})$ où ρ_0 est une constante positive. Il n'y a pas de charges à l'extérieur de la sphère.

1. Exprimer la charge totale de la sphère.

2. Déduire des symétries et des invariances que le champ électrique s'écrit $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{e_r}$.

3. Déduire de l'équation de Maxwell-Gauss, le champ électrique pour $r < a_0$ et pour $r > a_0$. On rappelle que le champ électrique est continu lorsque les charges sont réparties dans des volumes.

On donne en coordonnées sphériques : $div\overrightarrow{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(A_\phi)}{\partial\phi}$

4. Retrouver les résultats en utilisant le théorème de Gauss.

Réponses: $Q = \dfrac{\rho_0\pi a_0^3}{3}$, $E(r) = \dfrac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}(1 - \dfrac{3r}{4a_0})$ *pour* $r < a_0$ *et* $E(r) = \dfrac{\rho_0 a_0^3}{12\epsilon_0 r^2}$ *pour* $r > a_0$

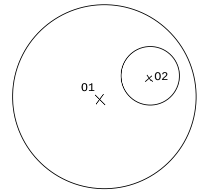
VII. **Symétrie sphérique**

1. Une sphère de centre O et de rayon b contient des charges positives réparties uniformément en volume. Q est la charge totale de la distribution. Déterminer la direction et les variables du champ électrique par des considérations de symétrie et d'invariance. Déterminer, en utilisant l'équation de Maxwell Gauss, les expressions $\overrightarrow{E_+}(M)$ et $\overrightarrow{E_-}(M)$ du vecteur champ électrostatique lorsque M se trouve respectivement à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère, à la distance r de son centre O.

On donne en coordonnées sphériques : $div\overrightarrow{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(A_\phi)}{\partial\phi}$

2. Application:

Une boule B de centre O_1 est creusée d'une cavité sphérique de centre O_2. Elle est chargée d'une densité de charge ρ uniforme, exception faite de la cavité sphérique qui est vide de charge. On appelle $\mathcal{D}$ cette distribution de charge



2.a. On considère la distribution $\mathcal{D}_1$ constituée par la boule pleine de centre O_1 et chargée avec la densité volumique ρ. Quelle distribution $\mathcal{D}_2$ faut-il lui superposer pour retrouver la distribution $\mathcal{D}$?

2.b. En déduire le champ que le champ électrique créé par $\mathcal{D}$ dans la cavité est $\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$.

Réponses : $\overrightarrow{E_-} = \frac{Q}{4\pi b^3\epsilon_0}\overrightarrow{OM} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{E_+} = \frac{Q}{4\pi r^2\epsilon_0}\overrightarrow{e_r}$, $f_0 = \sqrt{\frac{e^2}{16\pi^2 m\epsilon_0 a^3}}$

VIII. **Champ de gravitation**

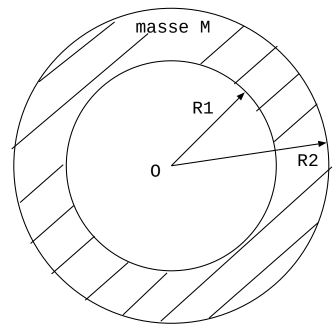
1. Rappeler les analogies formelles que l'on peut faire entre électrostatique et gravitation et en déduire le théorème de Gauss pour la gravitation.

2. On considère une planète de masse M répartie uniformément entre deux sphères de rayons R_1 et R_2.

2.a. Exprimer la masse volumique ρ_0 en un point M tel que $R_1 < r < R_2$.

2.b. Montrer que le champ de gravitation se met sous la forme $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r)\overrightarrow{e_r}$.

2.c. Déduire du théorème de Gauss, les expressions du champ de gravitation pour $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$.



Réponses: pour $r < R_1$: $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) = \overrightarrow{0}$, pour $R_1 < r < R_2$: $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) = \frac{-\mathcal{G}M}{r^2}(\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3})\overrightarrow{e_r}$, pour $r > R_2$: $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) = \frac{-\mathcal{G}M}{r^2}\overrightarrow{e_r}$

IX. **Polarisabilité électronique d'un atome**

Dans un atome le noyau de charge $+Ze$ est assimilé à un point noté P. Les électrons constituent un nuage électronique modélisé par une sphère de centre N, de rayon a et de charge $-Ze$, uniformément répartie. On note ρ la densité volumique de charge du nuage électronique.

1. Exprimer le champ électrique créé par le nuage électronique en un point M à l'intérieur du nuage (soit pour $NM = r < a$).

En absence de champ électrique extérieur, N et P sont superposés. Et quand on applique un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E_0}$, le nuage électronique se déplace et le noyau reste immobile: N et P sont donc distants de $d = NP$. Il apparaît alors un dipole induit de moment $\overrightarrow{p} = Ze\overrightarrow{NP}$.

2. Ecrire l'équilibre du noyau (soumis au champ électrique extérieur et au champ électrique créé par le nuage électronique), en déduire l'expression de $\overrightarrow{NP}$ puis l'expression du moment dipolaire induit sous la forme $\overrightarrow{p} = \alpha\epsilon_0\overrightarrow{E_0}$. Exprimer α, appelé polarisabilité électronique.

3. Donner un ordre de grandeur de la distance NP dans un atome d'hélium soumis à un champ électrique d'intensité 10^4 V/m avec $\epsilon_0 = 8,8.10^{-12}$ $F.m^{-1}$.

Réponses : $\overrightarrow{E}(P) = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a^3}\overrightarrow{NP}$, $\alpha = 4\pi a^3$, NP *de l'ordre de* 10^{-19} m