DS 6 de physique

Calculatrices interdites

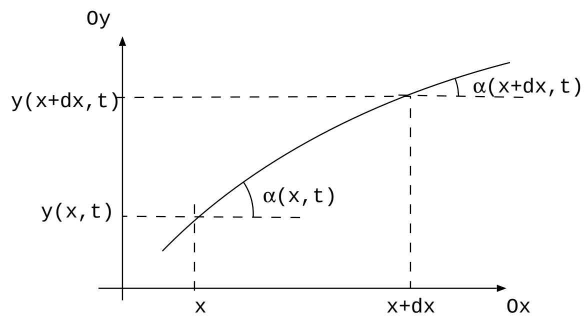
Le sujet comprend trois problèmes indépendants à traiter dans l'ordre de votre choix.Il est demandé de numéroter les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages.

Il est demandé un effort de présentation (tirer un trait entre chaque question et encadrer les résultats) et de rédaction (prendre soin de nommer les lois utilisées, les hypothèses pour les appliquer et expliquer clairement).

I. Pression de radiation

Réflexion sur une corde

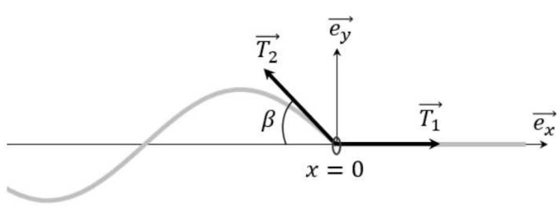
Une corde vibrante au repos de masse linéique μ est tendue avec la tension de norme $T(x)$. En négligeant l'effet de la pesanteur, on considère la corde horizontale le long de l'axe Ox. On s'intéresse aux petits mouvements transversaux. Le point de la corde d'abscisse x au repos se déplace à l'instant t de $y(x,t)$ selon l'axe Oy. On considère des petits mouvements, c'est-à-dire que l'angle α que fait la tangente de la corde avec l'horizontale est petit.



1. Démontrer la relation entre $\alpha(x,t)$ et une dérivée partielle de $y(x,t)$.

2. A l'aide du principe fondamental de la dynamique appliqué au bout de corde compris entre x et $x+dx$, montrer que la norme de la tension est uniforme le long de la corde et montrer que $y(x,t)$ vérifie une équation de la forme $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$. Exprimer c en fonction des données.

On fixe un point de la corde à l'aide d'un petit anneau de diamètre intérieur égal au diamètre de la corde. Cet anneau est maintenu dans une position fixe en $x=0$. Au niveau de l'anneau, les ondes se réfléchissent. En l'absence d'onde, la force exercée par la corde sur l'anneau est nulle. Lorsqu'une onde transversale se propage le long de la corde, la corde exerce des forces $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ respectivement à gauche et à droite sur l'anneau. Les normes de ces forces sont identiques ($||\overrightarrow{T_1}|| = ||\overrightarrow{T_2}|| = T$).



3. Exprimer la force $\overrightarrow{F}$ exercée par la corde sur l'anneau en fonction de la tension de la corde T et de l'angle β entre $\overrightarrow{T_2}$ et l'horizontale (β est un angle non orienté et positif).

Justifier alors que cette force s'exprime en fonction de la dérivée partielle de $\dfrac{\partial y}{\partial x}(x=0^-)$ (en faisant un DL au second ordre en β) comme $\overrightarrow{F} = \dfrac{T}{2}(\dfrac{\partial y}{\partial x}(x=0^-))^2\overrightarrow{e_x} - T\dfrac{\partial y}{\partial x}(x=0^-)\overrightarrow{e_y}$.

Soit une onde sinusoïdale progressive incidente solution de l'équation (1): $y_i(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$.

L'onde incidente se réfléchit sur l'anneau en $x=0$ et donne naissance à une onde réfléchie de la forme:

$y_r(x,t) = -A\sin(\omega t + kx)$.

4. Rappeler (sans démonstration) la relation entre les grandeurs suivantes : célérité de l'onde c, pulsation de l'onde ω et la norme du vecteur d'onde k.

5. Donner l'expression de l'onde résultante pour les $x<0$. Préciser alors le type d'onde qui en résulte. Donnée: $\sin a - \sin b = 2\cos(\dfrac{a+b}{2})\sin(\dfrac{a-b}{2})$.

6. Déterminer la projection de la force sur l'axe Ox dans le cas d'une telle onde. Déterminer alors l'expression de sa valeur moyenne temporelle $< \overrightarrow{F}.\overrightarrow{e_x} >$.

On donne la densité linéique d'énergie (énergie par unité de longueur de corde): $\epsilon(x,t) = \frac{\mu}{2}(\frac{\partial y}{\partial t})^2 + \frac{T}{2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2$.

7. Donner la signification physique des deux termes qui figurent dans cette expression. Relier la moyenne spatiale de l'énergie linéique de l'onde résultante à l'expression de la valeur moyenne de la projection sur l'axe Ox de la force exercée par la corde sur l'anneau.

Dans ce cas, on définit la pression de radiation comme $P_{rad} = \frac{< \overrightarrow{F}.\overrightarrow{e_x} >}{S}$ avec S la section de la corde. En divisant la moyenne spatiale de cette énergie linéique de l'onde par la section de la corde, on trouve l'énergie volumique de l'onde. On trouve alors un résultat général entre la pression de radiation et la densité volumique moyenne d'énergie des ondes dans tous les domaines: électromagnétisme, acoustique,...

Onde acoustique

Suite à la vérification de l'existence d'une pression de radiation en électromagnétisme, son analogue acoustique a été recherché par les physiciens. La pression de radiation acoustique a alors fait l'objet de nombreux travaux théoriques et expérimentaux. Cette pression déforme notamment l'interface entre deux milieux comme on peut le voir sur l'image suivante.

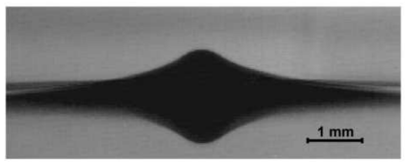


Image 3 - Déformation de l'interface eau-air par la pression de radiation acoustique
Source : thèse de B. Issenmann sur la déformation d'interfaces fluides par la pression de radiation acoustique, 2008

L'air est assimilé à un gaz parfait, initialement au repos et qui en l'absence de toute perturbation possède une masse volumique ρ_0, une pression P_0 et une température T_0 uniformes. On étudie la propagation d'onde plane de célérité c selon l'axe Ox. Le passage de l'onde perturbe l'équilibre. On définit les grandeurs suivantes en un point d'abscisse x à l'instant t:

- la pression $P(x,t) = P_0 + p_1(x,t)$ pression acoustique telle que $|p_1(x,t)| << P_0$

- la masse volumique $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$ avec $|\rho_1(x,t)| << \rho_0$

- la projection de la vitesse particulaire sur l'axe Ox, $v(x,t) = 0 + v_1(x,t)$ avec $|v_1(x,t)| << c$.

On note χ_S le coefficient de compressibilité isentropique.

8. Établir l'équation linéarisée de conservation de la masse dans le cas d'une propagation unidirectionnelle selon Ox en fonction de ρ_0, $\rho_1(x,t)$ et $v_1(x,t)$.

9. Écrire la loi linéarisée de la conservation de la quantité de mouvement dans le cas d'une propagation unidirectionnelle selon Ox en fonction de ρ_0, $v_1(x,t)$ et $p_1(x,t)$.

10. Donner l'équation isentropique linéarisée reliant ρ_1, ρ_0, χ_S et p_1.

11. En déduire que la surpression vérifie une équation de la forme $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$. Exprimer c en fonction des données.

On étudie une onde plane progressive harmonique d'expression $p_1(x,t) = p_{10}\cos(\omega t - kx)$ provenant des $x < 0$. Un obstacle est présent en $x = 0$.

12. Expliquer pourquoi la pression acoustique ne permet pas d'expliquer le phénomène de pression de radiation sur l'obstacle.

On propose d'utiliser l'égalité citée précédemment selon laquelle la pression de radiation est égale à la moyenne temporelle de l'énergie volumique de l'onde. On donne la densité volumique d'énergie d'une onde acoustique: $e(x,t) = \frac{\rho_0}{2}v_1(x,t)^2 + \frac{\chi_S}{2}p_1(x,t)^2$.

13. Donner la signification physique des deux termes qui figurent dans cette expression.. Dans le cas de l'onde plane progressive incidente $p_1(x,t)$, montrer que $e(x,t)$ peut s'écrire $e(x,t) = \chi_S p_1(x,t)^2$.

14. En considérant l'onde réfléchie sur l'obstacle d'expression $p_{10}\cos(\omega t + kx)$, déterminer la densité volumique d'énergie de l'onde totale (incidente et réfléchie). En déduire l'expression de la pression de radiation acoustique en fonction de χ_S et p_{10}.

On souhaite maintenant vérifier expérimentalement cette formule.

On réalise le protocole suivant : on émet une onde ultrasonore avec un émetteur d'ultrason fonctionnant à une fréquence de 40 kHz. Le générateur basse fréquence alimente l'émetteur en tension sinusoïdale d'amplitude U_e. On considère que l'amplitude de la pression acoustique de l'onde ultrasonore est proportionnelle à U_e. On place l'émetteur face à une balance de précision comme le précise la photo ci-dessous.

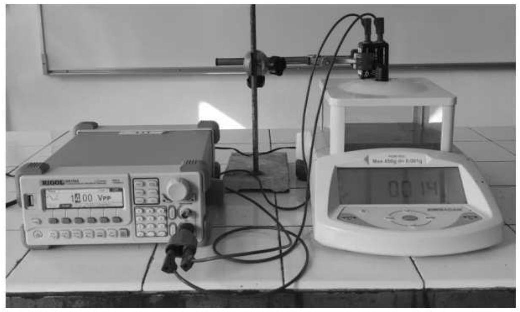


Image 4 - Expérience de la mesure de la pression de radiation acoustique

En présence d'une onde ultrasonore, la balance affiche une masse m. La masse indiquée donne une mesure de la force exercée par la pression de radiation sur le plateau de la balance. On fixe la distance entre l'émetteur et la balance (3 cm). On mesure alors la masse m en faisant varier l'amplitude U_e. On obtient les résultats suivants :

U_e (V)	4	4,5	5	6	6,5	7	8	8,5	9	9,5	10
m (mg)	5	6	7	10	11	14	17	19	21	23	26

15. À partir des données de l'expérience, démontrer que celles-ci sont compatibles avec le résultat de la question précédente. Une analyse graphique est attendue.

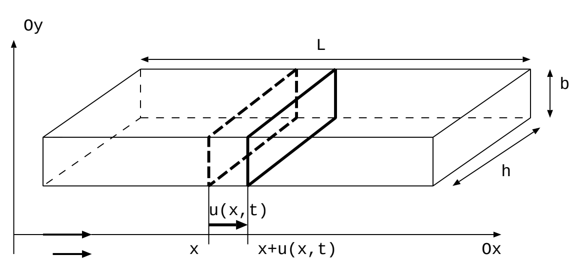
II. **Instruments de musique**

Cet exercice étudie certains instruments à percussion tels que le xylophone, le marimba ou le glockenspiel. Ils sont formés de lames parallélépipédiques de bois ou de métal. Chacune d'elles produit, lorsqu'on la frappe avec une baguette, un son de hauteur déterminée.

Glockenspiel

Marimba

On envisage les vibrations longitudinales d'une lame de longueur L. La matière située au repos dans le plan d'abscisse x se met en mouvement suite à une excitation. Elle occupe à l'instant t le plan d'abscisse $x + u(x,t)$ et est soumise, de la part de la matière située à **sa droite**, à une force $\overrightarrow{F_d} = F(x,t)\overrightarrow{e_x}$.



On note ρ la masse volumique et E le module d'Young du matériau dont on rappelle la définition : pour porter de l_0 à $l_0 + \delta l$ la longueur d'une tige de section S, il faut exercer sur ses extrémités une force égale à $ES\dfrac{\delta l}{l_0}$.

Données:

	bronze	acier
ρ (SI)	9000	8000
E (SI)	$10,0.10^{10}$	16.10^{10}

1. On considère le système infinitésimal compris entre x et $x+dx$ au repos. En présence d'une perturbation, la tranche en x s'est déplacée de $u(x,t)$ et la tranche en $x+dx$ s'est déplacée de $u(x+dx,t)$. Montrer que son allongement relatif s'écrit $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$. Que signifie physiquement le cas où $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) > 0$?

2. En déduire que $\overrightarrow{F_d}(x,t) = +ES\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\overrightarrow{e_x}$.

3. Dans cette barre la vitesse de propagation des ondes est de la forme $c = E^{\alpha}\rho^{\beta}$. Déterminer par une analyse dimensionnelle les valeurs numériques de α et β. Commenter le résultat.

4. Déduire de l' application du PFD au système infinitésimal compris entre x et $x+dx$ l'équation de propagation vérifiée par $u(x,t)$. Rappeler sans démonstration la relation de dispersion.

5. On recherche des solutions de la forme $u(x,t) = u_0 \sin(kx+\phi)\sin(\omega t)$. De quel type de solution s'agit-il? Justifier ce choix.

6. Les deux extrémités de la barre en $x=0$ et en $x=L$ sont fixes soit immobiles. Déterminer la valeur de ϕ et les valeurs possibles pour k_n ainsi que les valeurs possibles pour la longueur d'onde λ_n et la fréquence f_n de l'onde. Représenter l'onde dans le mode fondamental et pour le premier harmonique.

7. On dispose de deux lames de glockenspiel de même longueur, l'une en acier et l'autre en bronze. Laquelle joue des notes plus graves? Justifier votre réponse. Donnée: $\sqrt{2} = 1,4$.

8. Une lame de glockenspiel en acier de longueur $L = 20,0\ cm$ émet un son de fréquence égale à 600 Hz. Montrer qu'il ne peut pas résulter de l'excitation d'une onde longitudinale.

Les fréquences émises s'expliquent par les petits mouvements transversaux de la lame. On note $y(x,t)$ les petits déplacements verticaux au point d'abscisse x à l'instant t et on admet que $y(x,t)$ vérifie l'équation de propagation:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) + \frac{c^2 b^2}{12}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) = 0$$

où b est la dimension de la lame selon l'axe Oy.

9. On recherche des solutions de la forme $y(x,t) = y_0 \sin(kx+\phi)\sin(\omega t)$. Déterminer la relation de dispersion entre k et ω pour ces ondes.

10. Lorsque la lame est fixe à ses deux extrémités, montrer que les fréquences possibles s'écrivent $f_n = n^2\frac{\pi c b}{4\sqrt{3}L^2}$.

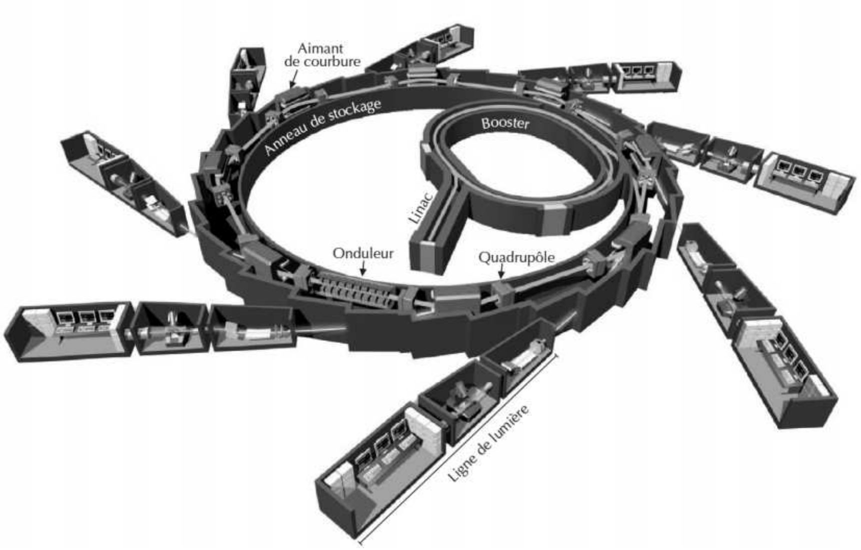
III. **Etude du synchrotron SOLEIL**

Un synchrotron est un instrument électromagnétique de grande taille destiné à l'accélération de particules chargées. Le rayonnement synchrotron est un rayonnement électromagnétique émis par une particule chargée possédant une accélération. Ce rayonnement est utilisé pour des analyses physiques. Dans le synchrotron SOLEIL, situé à Saclay, des électrons, de masse notée m_e et de charge $-e$, accélérés à une vitesse proche de celle de la lumière, sont déviés par des champs magnétiques.

Données	
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3{,}0\cdot10^{8}$ m·s^{-1}
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg = $5{,}1\cdot10^{2}$ keV/c^2
Charge élémentaire	$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C
Valeur de l'électron-volt	1 eV = $1{,}6\cdot10^{-19}$ J
Constante de Planck	h = $6{,}6\cdot10^{-34}$ J·s
Constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}0\cdot10^{23}$ mol^{-1}
Constante molaire des gaz parfaits	R = 8,3 J·K^{-1}·mol^{-1}

Bien que les données soient fournies avec deux chiffres significatifs, les résultats numériques calculés seront fournis, sauf indication contraire, avec UN SEUL chiffre significatif.

On donne le schéma général du synchrotron SOLEIL (Figure 1):



Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie I : généralités

Des électrons non-relativistes, émis sans vitesse initiale, sont accélérés linéairement par un champ électrostatique uniforme et unidirectionnel $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{e_x}$.

1. Rappeler la relation qui lie le champ électrostatique au potentiel électrostatique V. Donner le sens physique de cette relation et en déduire l'énergie potentielle électrostatique de l'électron en fonction de e et de V.

2. Calculer la différence de potentiel nécessaire pour obtenir une énergie cinétique finale $E_c = 1,0\ keV$. Justifier.

3. Dans la zone nommée Linac du synchrotron SOLEIL (voir figure 1), les électrons sont accélérés jusqu'à une énergie cinétique $E_c = 100\ MeV$. Calculer leur vitesse v et en déduire que cet électron est relativiste et sa vitesse ne peut donc pas être calculée à l'aide de la forme de l'énergie cinétique utilisée en mécanique classique.

4. Les électrons étant relativistes, leur énergie cinétique s'écrit : $E_c = (\gamma - 1)m_e c^2$ où $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ est appelé facteur de Lorentz de l'électron. Calculer ce facteur. En déduire la vitesse approchée de ces électrons.

Les électrons sont ensuite accélérés jusqu'à $E_c = 2,7\ GeV$ grâce à un autre accélérateur nommé booster, puis libérés dans l'anneau de stockage. Leur vitesse est alors assimilable à celle de la lumière.

5. L'intensité du courant circulant dans l'anneau de stockage, assimilé à un cercle de rayon $R = 57\ m$, vaut à un instant donné $i = 0,43\ A$. Evaluer le temps mis par un électron pour parcourir l'anneau de stockage et en déduire la charge totale circulant dans l'anneau et le nombre d'électrons N constituant le faisceau.

6. Le vide dans l'anneau de stockage n'est pas parfait, il subsiste principalement du dihydrogène, sous une pression $P = 6.10^{-13}\ bar$. En utilisant un modèle connu, calculer la densité particulaire n^* du gaz résiduel à $T = 298\ K$.

Les chocs entre les N électrons d'un faisceau et les molécules de gaz résiduel fait varier le nombre d'électrons du faisceau. Pour une longueur dx de parcours, cette variation s'écrit: $dN = -\sigma n^* N dx$.

7. Justifier dimensionnellement le nom de "section efficace" donné au coefficient σ.

8. En raison de ces chocs, le faisceau a une durée de vie τ, définie comme la durée pour laquelle le nombre N d'électrons a diminué de 37,8 %. Montrer que $N(t)$ vérifie l'équation différentielle $\dfrac{dN}{dt} + n^*\sigma c N = 0$. En déduire τ en fonction de σ, n^* et c.

9. On considère $\sigma = 2,0.10^{-23}\ cm^2$ dans le synchrotron. Calculer la durée de vie du faisceau. On donne $\ln(0,63) = -0,46$.

Partie II: éléments magnétiques

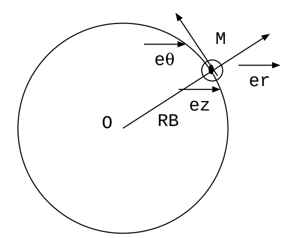
L'anneau de stockage n'est pas rigoureusement circulaire: il est constitué de portions linéaires et d'éléments magnétiques qui sont des dipôles, des quadrupôles et des sextupôles.

10. Donner le nom de l'effet qui permet de mesurer un champ magnétique au laboratoire.

Les dipôles sont des aimants servant à courber la trajectoire des électrons. On considère une base cartésienne $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Un dipôle crée un champ magnétique vertical supposé uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{e_z}$ avec $B_0 > 0$.

11. On considère un électron non relativiste pénétrant avec une vitesse de norme v_0. Justifier le fait que la norme de la vitesse est constante.

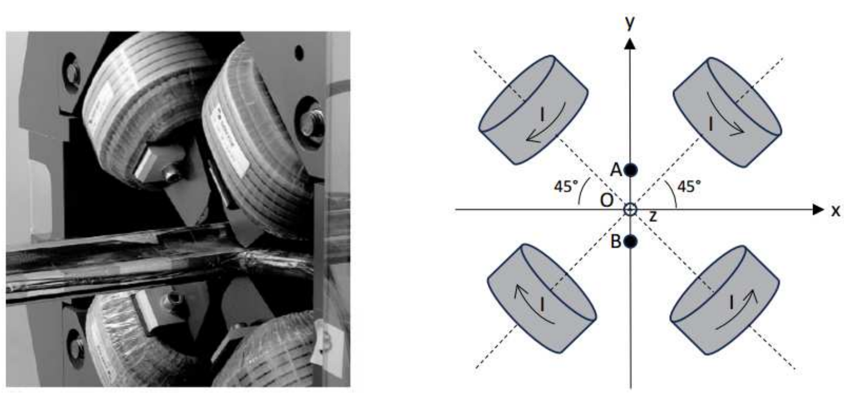
On admet que la trajectoire est circulaire de rayon R_B. Reproduire le schéma ci-contre et ajouter sur ce schéma, le champ magnétique, la vitesse de l'électron placé en M et la force magnétique. Montrer que l'on a $B_0 = \dfrac{p}{eR_B}$ (relation 1) où p est la quantité de mouvement de l'électron.



Exprimer la pulsation ω_B de l'électron sur sa trajectoire.

12. La relation (1) reste valable dans le cadre de la relativité restreinte, avec une norme de la quantité de mouvement voisine de $p \approx \dfrac{E_c}{c}$. Calculer la valeur du champ magnétique permettant d'obtenir un rayon $R_B = 5,4\ m$ pour la trajectoire. On rappelle que dans l'anneau de stockage $E_c = 2,7\ GeV$.

Les inhomogénéités de vitesse du paquet d'électrons entraînent une divergence du faisceau d'électrons, qui doit donc être focalisé. On utilise pour cela des quadrupôles, composés de quatre bobines disposées en carré (figure 2).



Le champ magnétique créé par les quatre bobines peut s'écrire au voisinage de l'origine:

$$\overrightarrow{B} = Ky\overrightarrow{e_x} + Kx\overrightarrow{e_y} \text{ où } K \text{ est une constante positive}$$

13. On considère un faisceau d'électrons de vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e_z}$ avec $v_0 > 0$ possédant une faible extension $\Delta y > 0$ autour de l'origine. Sur un schéma, dessiner le champ magnétique et la force exercée sur un électron au point $A(0, \Delta y/2, 0)$ et sur un électron au point $B(0, -\Delta y/2, 0)$ (les points A et B sont représentés sur la figure 2). En déduire que le faisceau est refocalisé au voisinage de l'origine grâce au quadrupôle.

14. Montrer en faisant un schéma analogue à celui de la question précédente que le faisceau d'électrons de vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e_z}$ avec $v_0 > 0$ possédant une extension $\Delta x > 0$ autour de l'origine sera cette fois défocalisé.

Pour pallier à cet inconvénient, et corriger la trajectoire des électrons, il faudra ajouter des quadrupôles et des sextupôles.

IV. **Réflexion sur une corde (sujet E3A PC 2025)**

1. On a $\tan\alpha(x,t) = \dfrac{y(x+dx,t)-y(x,t)}{dx} \approx \dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t) \approx \alpha(x,t)$.

2. Le bout de corde compris entre x et $x+dx$ a pour masse μdx, pour accélération $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y}$ et subit son poids (négligé), les forces de tension à droite $\overrightarrow{T}(x+dx,t)$ et à gauche $-\overrightarrow{T}(x,t)$.

La RFD s'écrit $\mu dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T}(x+dx,t) - \overrightarrow{T}(x,t)$

On projette sur Ox: $0 = T(x+dx)\cos\alpha(x+dx,t) - T(x)\cos\alpha(x,t)$

Les angles sont petits donc $\cos\alpha \approx 1$. On a donc $T(x+dx) = T(x)$ donc la norme de la tension est uniforme, elle ne dépend pas de x.

On projette sur Oy: $\mu dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\sin\alpha(x+dx,t) - T\sin\alpha(x,t)$ soit $\mu dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(\alpha(x+dx,t)-\alpha(x,t)) \approx T\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}dx = T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

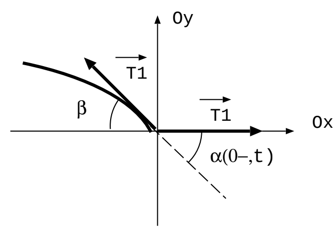
On trouve donc que $y(x,t)$ vérifie une équation de type d'Alembert $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{\mu}{T}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$. La célérité des ondes est donc $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$: les ondes vont d'autant plus vite que la corde est tendue et peu dense.

3. Les forces de tension exercées sur l'anneau s'écrivent:

$\overrightarrow{T_1} = T\overrightarrow{e_x}$

$\overrightarrow{T_2} = T(\sin\beta\overrightarrow{e_y} - \cos\beta\overrightarrow{e_x}) = T(\beta\overrightarrow{e_y} - (1-\dfrac{\beta^2}{2})\overrightarrow{e_x}$ en faisant un DL à l'ordre 2 en β.

De plus on a $\beta = -\alpha(x=0^-,t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}(x=0^-)$ (ici on a $\beta > 0$ et la pente de la tangente à la courbe est négative donc $\alpha(x=0^-,t) < 0$).



Ainsi la résultante des forces de tension est $\overrightarrow{F} = (T - T(1-\dfrac{\beta^2}{2})\overrightarrow{e_x} + T\beta\overrightarrow{e_y} = \dfrac{T\beta^2}{2}\overrightarrow{e_x} + T\beta\overrightarrow{e_y}$.

On a donc $\overrightarrow{F}.\overrightarrow{e_x} = \dfrac{T\beta^2}{2} = \dfrac{T}{2}(\dfrac{\partial y}{\partial x}(x=0^-))^2$ et $\overrightarrow{F}.\overrightarrow{e_y} = T\beta = -T\dfrac{\partial y}{\partial x}(x=0^-)$.

4. On a $k = \dfrac{\omega}{c}$. Cette relation s'appelle la relation de dispersion.

5. L'onde résultante est la somme des ondes incidente et réfléchie soit $y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t) = A(\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx)) = 2A\cos(\omega t)\sin(-kx) = -2A\cos(\omega t)\sin(kx)$: il s'agit d'une OS puisque le temps et l'espace ne sont pas dans le même terme.

6. On a donc $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -2Ak\cos(\omega t)\cos(kx)$ soit $\overrightarrow{F}.\overrightarrow{e_x} = \dfrac{T}{2}(-2kA\cos(\omega t))^2 = 2Tk^2A^2\cos^2(\omega t)$ soit en moyenne au cours du temps $<\overrightarrow{F}.\overrightarrow{e_x}>= Tk^2A^2$

7. Le terme $\dfrac{\mu}{2}(\dfrac{\partial y}{\partial t})^2$ représente l'énergie cinétique linéique de la corde.

Le terme $\dfrac{T}{2}(\dfrac{\partial y}{\partial x})^2$ représente l'énergie potentielle linéique des forces de tension.

On a $\dfrac{\partial y}{\partial t} = 2A\omega\sin(\omega t)\sin(kx)$ et $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -2Ak\cos(\omega t)\cos(kx)$.

On remplace dans l'expression de la densité linéique d'énergie $\epsilon(x,t) = \dfrac{\rho}{2}(2A\omega\sin(\omega t)\sin(kx))^2 + \dfrac{T}{2}(-2Ak\cos(\omega t)\cos(kx))^2 = 2\rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t)\sin^2(kx) + 2TA^2k^2\cos^2(\omega t)\cos^2(kx)$. On en fait la moyenne spatiale soit $\epsilon(x,t) = \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t) + TA^2k^2\cos^2(\omega t) = \rho A^2\omega^2 = Tk^2A^2$ car $Tk^2 = \frac{T\omega^2}{c^2} = \rho\omega^2$.

Onde acoustique

8. La conservation de la masse s'écrit $\mathrm{div}(\rho\overrightarrow{v}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} = 0$ donne $\dfrac{\partial}{\partial x}((\rho_0+\rho_1)v_1) + \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0$.

Dans l'approximation acoustique, on ne garde que les termes d'ordre 1 soit $\rho_0\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+\dfrac{\partial \rho_1}{\partial t}=0$.

9. On écrit l'équation d'Euler: $\rho(\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}+(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v})=-\overrightarrow{\text{grad}}P$ soit au premier ordre $\rho_0\dfrac{\partial v_1}{\partial t}=-\dfrac{\partial p_1}{\partial x}$.

10. Le coefficient de compressibilité isentropique s'écrit $\chi_S=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial P}=\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\rho-\rho_0}{P-P_0}=\dfrac{\rho_1}{\rho_0 p_1}$.

11. On a donc $\rho_1=\rho_0\chi_S p_1$. Cette relation donne $\dfrac{\partial v_1}{\partial x}=-\chi_S\dfrac{\partial p_1}{\partial t}$ quand on la remplace dans la conservation de la masse.

On dérive l'équation d'Euler par rapport à x: $\rho_0\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial v_1}{\partial t})=-\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$ soit $\rho_0\dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial v_1}{\partial x})=\rho_0\dfrac{\partial}{\partial t}(-\chi_S\dfrac{\partial p_1}{\partial t})=-\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$

On obtient donc une équation de type d'Alembert: $\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}=0$ avec $c=\sqrt{\dfrac{1}{\rho_0\chi_S}}$: les ondes acoustiques vont d'autant plus vite que le milieu est peu compressible et peu dense.

12. La valeur moyenne au cours du temps de la pression acoustique est nulle donc elle ne permet pas d'expliquer une force de pression résultante sur l'obstacle.

13. Pour une $OPPH^+$ on a $Z=\dfrac{p_1}{v_1}=+\rho_0 c$. On a donc $v_1=\dfrac{p_1}{\rho_0 c}$.

On remplace dans l'expression de la densité volumique d'énergie de l'onde $e(x,t)=\dfrac{\rho_0}{2}(\dfrac{p_1}{\rho_0 c})^2+\dfrac{\chi_S}{2}p_1^2=\chi_0 p_1^2$ car $\dfrac{1}{\rho_0 c^2}=\chi_S$.

Le terme $\dfrac{\rho_0}{2}v_1(x,t)^2$ correspond à l'énergie cinétique volumique.

Le terme $\dfrac{\chi_S}{2}p_1^2$ correspond donc à l'énergie potentielle volumique des forces de pression.

14. La densité volumique d'énergie pour l'onde totale est $e(x,t)=\chi_0 p_{10}^2(\cos^2(\omega t-kx)+\cos^2(\omega t+kx))$. On en fait la moyenne temporelle et on a $<e(x,t)>=\chi_S p_{10}^2$.

D'après les questions précédentes, la pression de radiation est égale à la densité volumique moyenne d'énergie soit $P_{rad}=\chi_S p_{10}^2$.

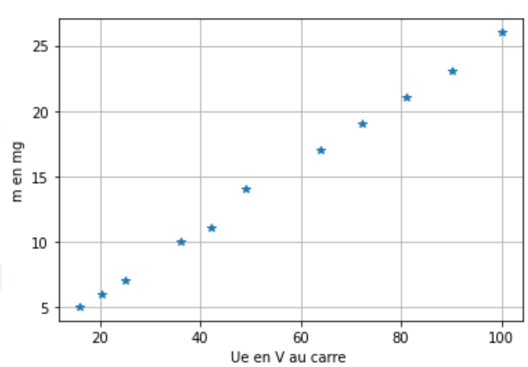
15. L'énoncé nous indique que p_{10} (l'amplitude de la surpression) est proportionnelle à U_e. On a donc P_{rad} proportionnelle à U_e^2.

De plus la pression de radiation est égale à la force exercée sur la balance divisée par la surface et la force exercée par la balance est égale à mg.

On a donc la masse m qui est proportionnelle à U_e^2, c'est ce que je vérifie graphiquement ci-dessous.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

Uecarre=np.array([4,4.5,5,6,6.5,7,8,8.5,9,9.5,10])**2
m=np.array([5,6,7,10,11,14,17,19,21,23,26])
plt.plot(Uecarre,m,'*')
plt.grid()
plt.xlabel('Ue en V au carre ')
plt.ylabel('m en mg')
plt.show()
```



V. **Synchrotron SOLEIL (sujet CCINP MP 2025)**

1. La relation entre le champ électrique et le potentiel s'écrit $\overrightarrow{E}=-\overrightarrow{grad}V$, elle traduit le fait que le champ électrique est dirigé des forts vers les faibles potentiels et qu'il est d'autant plus intense que les différences de potentiels sont grandes.

L'énergie potentielle d'une charge q dans un potentiel V est $E_p=qV$.

2. Soit un électron de charge $-e$ de vitesse nulle soumis à la différence de potentiel V_2-V_1. Son énergie cinétique sur l'électrode de potentiel V_1 est nulle, on cherche son énergie cinétique sur l'électrode de potentiel

V_2.

Cet électron subit son poids qui est négligeable et la force électrique qui est conservative donc son énergie mécanique est constante, on a: $E_m = 0 + (-e)V_1 = E_c + (-e)V_2$ soit $E_c = e(V_2 - V_1)$.

AN: $V_2 - V_1 = \dfrac{E_c}{e} = 1,0.10^3\ V$.

3. On a $E_c = \dfrac{m_e v^2}{2}$ soit $v = \sqrt{\dfrac{2E_c}{m_e}} = \sqrt{\dfrac{2.100.10^6 c^2}{5,1.10^5}} = \sqrt{400c^2} = 20c > \dfrac{c}{10}$: ce n'est pas possible de trouver que la vitesse des électrons est supérieure à la vitesse de la lumière, donc il faut traiter ces électrons du point de vue relativiste.

4. On a $E_c = (\gamma - 1)m_e c^2$ soit $\gamma = 1 + \dfrac{E_c}{m_e c^2} = 1 + \dfrac{100.10^6}{5,1.10^5} = 200$.

On a alors $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ soit $v = c\sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \approx c$.

5. La relation entre l'intensité du courant électrique et la charge s'écrit $I = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{Q}{\tau}$. Pour connaître la charge présente dans l'anneau de stockage, il faut calculer le temps mis par les électrons pour parcourir tout l'anneau de stockage soit la distance $\tau = 2\pi R$ à la vitesse c. Ainsi $Q = I\tau = I\dfrac{2\pi R}{c} = \dfrac{0,4.2.3.60}{3.10^8} = 48.10^{-8}\ C$.

On en déduit le nombre d'électrons $N = \dfrac{Q}{e} = \dfrac{48.10^{-8}}{1,6.10^{-19}} = 24.10^{11}$ électrons.

6. On applique le modèle du gaz parfait soit $PV = n_{moles}RT$. La densité particulaire est définie par $n^* = \dfrac{n_{moles}\mathcal{N}_a}{V} = \dfrac{P\mathcal{N}_a}{RT} = \dfrac{6.10^{-13}.10^5.6.10^{23}}{8.300} = 1,5.10^{13}\ molecules.m^{-3}$.

7. $[\sigma] = [\dfrac{dN}{n^* N dx}] = [\dfrac{1}{ndx}] = \dfrac{1}{m^{-3}.m} = m^2$: c'est bien homogène à une surface.

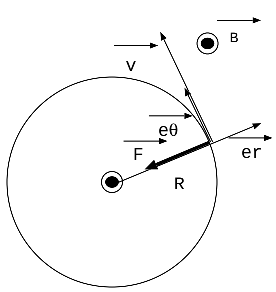
8. La relation donnée $dN = -\sigma n^* N dx$ conduit à l'équation $\dfrac{dN}{dt} = -\sigma n^* N \dfrac{dx}{dt} = -\sigma n^* N c$ soit l'équation différentielle $\dfrac{dN}{dt} + \sigma n^* c N = 0$ dont la solution s'écrit $N(x) = N_0 e^{-\sigma n^* ct}$.
A l'instant $t = 0$ on a $N = N_0$.

On cherche l'instant τ pour lequel $N(\tau) = (1 - 0,37)N_0 = N_0 e^{-\sigma n^* c\tau}$ soit $\tau = -\dfrac{\ln 0,63}{\sigma n^* c}$.

9. AN: $\tau = \dfrac{0,5}{2.10^{-23}.10^{-4}.3.10^8.2.10^{12}} = \dfrac{1}{24.10^{-7}} = 4.10^5\ s$.

10. On peut mesurer un champ magnétique en utilisant une sonde à effet Hall.

11. L'électron subit: la force magnétique $\overrightarrow{F} = -e\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{B}$ et son poids négligé devant la force magnétique. La force magnétique est perpendiculaire au mouvement, elle ne travaille pas donc le mouvement de l'électron est uniforme, sa vitesse est constante en norme.



On applique le PFD à l'électron: $m_e\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{F}$
avec $\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -\dfrac{v_0^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta} = -\dfrac{v_0^2}{R}\overrightarrow{e_r}$ pour un mouvement circulaire uniforme
avec $\overrightarrow{F} = -e\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{B} = -ev_0\overrightarrow{e_\theta}\Lambda B_0\overrightarrow{e_z} = -ev_0B_0\overrightarrow{e_r}$: la force est centripète

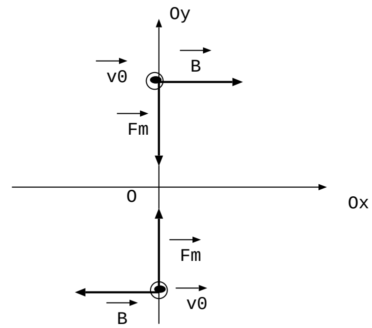
On projette sur $\overrightarrow{e_r}$: $-\dfrac{m_e v_0^2}{R_B} = -ev_0B$ soit $R_B = \dfrac{m_e v_0}{eB_0}$ donc $B_0 = \dfrac{m_e v_0}{eR_B} = \dfrac{p}{eR_B}$.

On en déduit la période de l'électron $T = \dfrac{2\pi R_B}{v_0} = \dfrac{2\pi m_e}{eB_0}$ et la pulsation $\omega_B = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{eB_0}{m_e}$.

12. AN: $B_0 = \dfrac{p}{eR_B} = \dfrac{E_c}{eR_Bc} = \dfrac{2,7.10^9}{5,4.3.10^8} = \dfrac{10}{2.3} = \dfrac{5}{3} = 1,7\ T$.

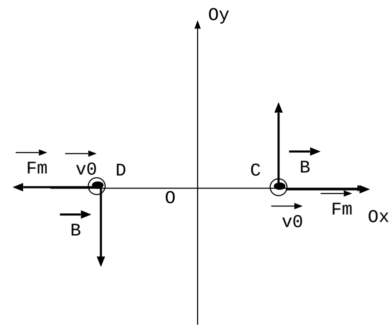
13. Au point $A(0, \Delta y/2, 0)$ le champ magnétique s'écrit $\overrightarrow{B} = K\Delta y/2\overrightarrow{e_x}$ avec $K\Delta y/2 > 0$. Au point $B(0, -\Delta y/2, 0)$ le champ magnétique s'écrit $\overrightarrow{B} = -K\Delta y/2\overrightarrow{e_x}$. On en déduit le schéma suivant en traçant les forces magnétiques sur l'électron $\overrightarrow{F_m} = -e\overrightarrow{v_0}\Lambda\overrightarrow{B}$.

Les forces exercées sur A et B ramènent les électrons vers le centre comme on le souhaite.



14. Au point $C(\Delta x/2, 0, 0)$ le champ magnétique s'écrit $\overrightarrow{B} = K\Delta x/2\overrightarrow{e_y}$ avec $K\Delta x/2 > 0$. Au point $D(-\Delta x/2, 0, 0)$ le champ magnétique s'écrit $\overrightarrow{B} = -K\Delta x/2\overrightarrow{e_y}$. On en déduit le schéma suivant en traçant les forces magnétiques sur l'électron $\overrightarrow{F_m} = -e\overrightarrow{v_0}\Lambda\overrightarrow{B}$.

Les forces exercées sur C et D éloignent les électrons du centre contrairement à ce que l'on souhaite.



VI. **Instruments de musique (arrangement de centrale PC 2010)**

1. On étudie le système élémentaire compris entre x et $x + dx$ au repos et compris entre $x + u(x, t)$ et $x + dx + u(x + dx, t)$ en présence d'une onde.

Sa longueur au repos est $l_0 = dx$

Sa longueur en présence d'une onde est $l = x + dx + u(x, t) - x - u(x, t) = dx(1 + \dfrac{\partial u}{\partial x})$.

L'allongement relatif s'écrit donc $\dfrac{l - l_0}{l_0} = \dfrac{dx(1 + \frac{\partial u}{\partial x}) - dx}{dx} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x} > 0$ cela signifie que le système s'est alongé.

2. Comme indiqué dans l'énoncé, la force exercée en x par le système à sa droite est $\overrightarrow{F}(x, t) = ES\dfrac{\delta l}{l_0}\overrightarrow{e_x} = ES\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, t)\overrightarrow{e_x}$.

3. $[\rho] = kg.m^{-3}$

$[E] = [\dfrac{F}{S}] = kg.m.s^{-2}.m^{-2} = kg.m^{-1}.s^{-2}$

On veut exprimer la vitesses des ondes soit $[c] = [E^\alpha \rho^\beta]$ donne $m.s^{-1} = (kg.m^{-1}.s^{-2})^\alpha (kg.m^{-3})^\beta = kg^{\alpha+\beta}.m^{-\alpha-3\beta}.s^{-2\alpha}$.

Par identification on a:

pour les m: $1 = -\alpha - 3\beta$

pour les kg: $0 = \alpha + \beta$

pour les s: $-1 = -2\alpha$

On obtient donc $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = -\dfrac{1}{2}$ soit $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$: l'onde va d'autant plus vite que le milieu est rigide et peu dense.

4. Soit le système élémentaire compris, au repos, entre x et $x + dx$: il subit à droite la force $\overrightarrow{F_d}(x + dx, t) = ES\dfrac{\partial u}{\partial x}(x + dx, t)\overrightarrow{e_x}$ et à gauche la force $\overrightarrow{F_g}(x, t) = -ES\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, t)\overrightarrow{e_x}$.

Ce système élémentaire a pour masse $\rho S dx$ et pour accélération $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)\overrightarrow{e_x}$.

Le PFD appliqué à ce système donne en projection sur Ox:

$$\rho S dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = ES\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx,t) - ES\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = ESdx\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

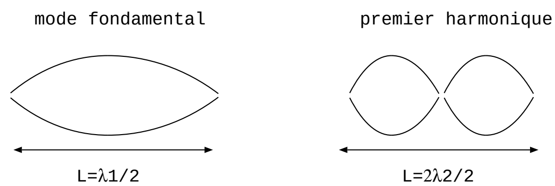
On obtient donc l'équation de propagation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$: on reconnaît une équation de d'Alembert avec pour vitesse des ondes $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. La relation de dispersion est de la forme $k = \frac{\omega}{c}$.

5. La solution proposée correspond à une onde stationnaire car les variables de temps et d'espace ne sont pas dans le même terme. Ce choix se justifie par le fait que le milieu de propagation est de taille finie.

6. On applique les conditions aux limites: $u(x=0,t) = 0 = u_0 \sin\phi \sin(\omega t)$ qui implique que $\sin\phi = 0$ soit $\phi = 0$.

On a aussi $u(x=L,t) = 0 = u_0 \sin(kL)\sin(\omega t)$ qui implique $\sin(kL) = 0$ soit $k_n L = n\pi$ ou encore $k_n = \frac{n\pi}{L}$ pour $n \leq n$.

Par la suite les relations $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ et $f_n = \frac{c}{\lambda_n}$ donnent $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ et $f_n = \frac{nc}{2L}$.



7. On calcule la célérité des ondes dans le bronze et dans l'acier:

$c_{bronze} = \sqrt{\frac{10^{11}}{9.10^3}} = \frac{10^4}{3} = 3300\ m.s^{-1}$.

$c_{acier} = \sqrt{\frac{16^{10}}{8.10^3}} = \sqrt{2.10.10^6} = \sqrt{2}310^3 = 4200\ m.s^{-1} > c_{bronze}$.

Les fréquences émises sont proportionnelles à la célérité donc le glockenspiel en acier émet un son plus aigu (fréquences plus élevées) que celui en bronze.

8. Les fréquences émises par la lame sont de la forme $f_n = n\frac{c}{2L}$ avec $\frac{c}{2L} = \frac{4200}{2.0,2} = 1050\ Hz$. Les fréquences émises sont donc des multiples de 1050 Hz pour les ondes longitudinales étudiées. Les ondes de 500 Hz ne sont pas longitudinales.

9. On remplace la solution proposée dans l'équation de propagation avec:

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x,t)$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y(x,t)$ et $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = (-k^2)^2 y(x,t) = k^4 y(x,t)$.

On a donc $-\omega^2 y(x,t) + \frac{c^2 b^2}{12} k^4 y(x,t)$ soit $k^4 = \frac{12\omega^2}{c^2 b^2}$. Attention, l'équation de propagation n'est pas une équation de d'Alembert donc la relation de dispersion n'est pas $k = \frac{\omega}{c}$.

10. La lame est fixe à ses deux extrémités donc on a comme précédemment $y(x=0,t) = y(x=L,t)$ qui imposent $\phi = 0$ et $k_n = \frac{n\pi}{L}$.

On applique la relation de dispersion $k_n^4 = \frac{12\omega_n^2}{c^2 b^2} = (\frac{n\pi}{L})^4$ soit $k_n^2 = \frac{2\sqrt{3}\omega_n}{cb} = \frac{2\pi\sqrt{3}2\pi f_n}{cb} = (\frac{n\pi}{L})^2$ qui donne $f_n = n^2\frac{\pi cb}{4\sqrt{3}L^2}$: fréquences de résonance liées aux ondes transversales sur les lames.