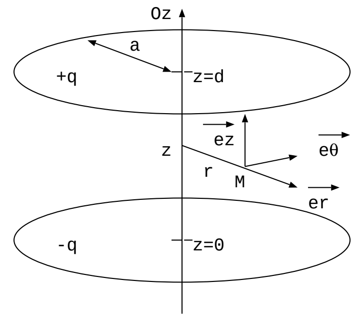
DM 7 de physique

I. **Principe d'un capteur d'humidité capacitif**

Deux disques conducteurs, de rayon a, de même axe (Oz), distants de $d << a$, constituent les armatures d'un condensateur à vide. On note $+q$ la charge portée par l'armature supérieure placée en $z = d$ et donc $-q$ la charge de l'armature inférieure placée en $z = 0$. On s'intéresse au champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$ en tout point M à l'intérieur du condensateur et repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans le repère $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.



On néglige les effets de bord.

1. Montrer que le champ électrique est de la forme $\overrightarrow{E}(M) = E(z)\overrightarrow{e_z}$.

2. Soit la surface fermée constituée du cylindre de rayon a, d'axe Oz compris entre les plans de côtes z_1 et $z_2 > z_1$. Exprimer le flux du champ électrique à travers ce cylindre en fonction de a, $E(z_1)$ et $E_(z_2)$.

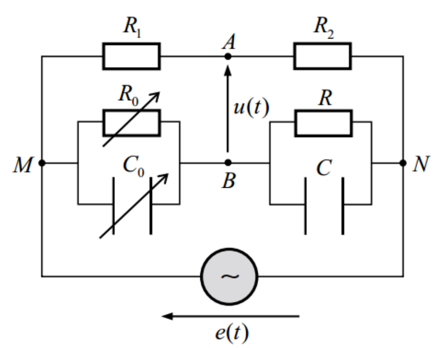
3. Enoncer le théorème de Gauss. Déduire du théorème que le champ électrique entre les armatures du condensateur est uniforme (aide: comment faut-il placer le cylindre de Gauss pour cela?).

4. On admet que le champ électrique à l'extérieur du condensateur (soit pour $z > d$ et $z < 0$) est nul. Déduire du théorème que le champ électrique entre les armatures du condensateur s'écrit $\overrightarrow{E}(0 < z < d) = -\dfrac{q}{\pi a^2 \epsilon_0}\overrightarrow{e_z}$.

5. Exprimer le potentiel $V(z)$ entre les armatures du condensateur en fonction d'une constante A, en déduire la tension $U = V(z = d) - V(z = 0)$ et en déduire l'expression de la capacité du condensateur.

On munit désormais le condensateur d'une armature poreuse et on le remplit d'un polymère hygroscopique pouvant adsorber l'eau de l'air et dont la permittivité diélectrique ϵ est fonction du degré hygrométrique de l'air. On admet que la capacité C de ce condensateur a la même expression que celle du condensateur à vide établie précédemment à condition de remplacer la permittivité ϵ_0 du vide par la permittivité ϵ du polymère. Le condensateur possède en outre une résistance de fuite R, principalement due au polymère qui en adsorbant l'eau ne se comporte pas comme un isolant parfait. Le modèle électrique équivalent de ce condensateur est constitué de la capacité C en parallèle avec la résistance R.

Le condensateur est inséré dans le circuit ci-contre, appelé pont de Sauty, alimenté sous une tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω, où la résistance R_0 et la capacité C_0 sont variables. On note $u(t)$ la tension entre les points A et B, $\underline{e}$ et $\underline{u}$ les représentations complexes des tensions respectives $e(t)$ et $u(t)$. On note $\underline{Z_0}$ l'impédance de l'association parallèle de la capacité C_0 et de la résistance R_0 entre les points M et B, et $\underline{Z}$ l'impédance de l'association parallèle de la capacité C et de la résistance R entre les points B et N.



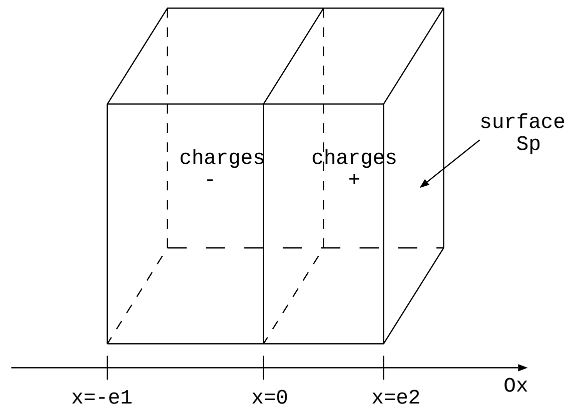
6. Exprimer en fonction de $\underline{e}$ et des différentes impédances les tensions $\underline{u}_{AN}$ et $\underline{u}_{BN}$. En déduire que $\underline{u} = \dfrac{R_2\underline{Z}_0 - R_1\underline{Z}}{(R_1 + R_2)(\underline{Z}_0 + \underline{Z})}\underline{e}$.

7. Le pont de Sauty est dit équilibré lorsque $\underline{u} = 0$, quelle que soit la tension $\underline{e}$. Montrer que l'équilibre du pont permet de déterminer R et C, dont on donnera l'expression en fonction de R_0, R_1, R_2 et C_0.

8. On utilise le condensateur en tant que capteur d'humidité dont on donne ci-dessous la courbe d'étalonnage. Déterminer le degré hygrométrique de la pièce dans laquelle il est plongé sachant que le pont de Sauty est équilibré pour $C_0 = 1,44\ nF$ avec $R_2/R_1 = 0,1$.

II. **Répartition non uniforme de charges**

On étudie la répartition de charges neutre et non uniforme suivante: le parallélépipède de surface S_p compris entre les plans $x = -e_1$ et $x = 0$, comprend des charges négatives et le parallélépipède compris entre les plans $x = 0$ et $x = e_2$ de même surface S_p, comprend des charges positives.



La densité volumique de charges $\rho(x)$ de cette répartition peut s'écrire:

$\rho(x < -e_1) = 0$

$\rho(-e_1 < x < 0) = -\rho_1 < 0$

$\rho(0 < x < e_2) = \rho_2 > 0$

$\rho(x > e_2) = 0$

ρ_1 et ρ_2 sont des constantes positives.

On se place dans le cas où les plans de surface S_p sont infinis, cela revient à dire que l'on néglige les phénomènes de bord.

1. Représenter la fonction $\rho(x)$. Déterminer la relation entre ρ_1, ρ_2, e_1 et e_2 sachant que la charge totale est nulle.

2. Déduire des propriétés de symétrie et d'invariance la direction et la variable du champ électrique.

3. On suppose que le champ électrique en $x \to -\infty$ est nul. On choisit pour surface de Gauss, un parallélépipède de section S (dans le plan parallèle à Oyz) compris entre les plans $x \to -\infty$ et x (quelconque). Représenter ce parallélépipède et montrer que le flux sortant du champ électrique à travers ce cylindre est $\phi = E(x)S$.

4. On se place dans le cas où $x < -e_1$. Faire un schéma avec les charges et la surface de Gauss et en déduire la charge intérieure à la surface de Gauss. En déduire le champ électrique pour $x < -e_1$. Répondre à la même question dans les cas où $-e_1 < x < 0$, $0 < x < e_2$ et $x > e_2$.

5. Représenter la fonction $E(x)$. Exprimer le potentiel électrique en tout point de l'espace avec la convention $V(x = 0) = 0$. En déduire la tension $U_0 = V(x = e_2) - V(x = -e_1)$.