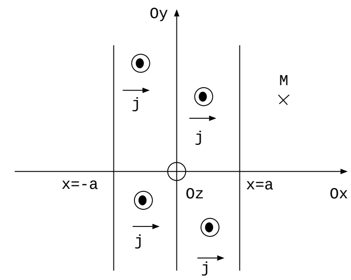
TD magnétostatique

I. Champ créé par des courants dans un parallélépipède

Soit des courants présents entre les deux plans infinis d'équation $x = -a$ et $x = +a$. La densité de courants s'écrit $\overrightarrow{j}(x) = j_0 \overrightarrow{e_z}$ pour $-a \leq x \leq a$ et $\overrightarrow{j}(x) = \overrightarrow{0}$ pur $x < -a$ et $x > a$.



1. Déterminer la direction du champ magnétique et la variable dont il dépend.

2. Donner, en la justifiant, la relation entre $\overrightarrow{B}(x)$ et $\overrightarrow{B}(-x)$.

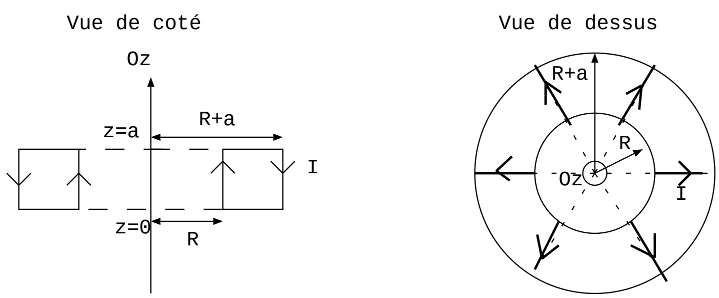
3. Appliquer le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace (on choisit comme contour d'Ampère un rectangle dans le plan Oxy en pensant à utiliser les propriétés de symétrie).

4. Retrouver l'expression du champ magnétique en utilisant l'équation de Maxwell Ampère.

Réponses: Pour $0 < x < a$: $B(x) = \mu_0 .j.x$, *pour* $x > a$: $B(x) = \mu_0 .j.a$.

II. Champ créé par un tore à spires carrées

Soit un tore à spires carrées de côté a comportant N tours de fil uniformément répartis et parcourus par un courant d'intensité I.



1. Montrer que $\overrightarrow{B} = B(r, z)\overrightarrow{e_\theta}$. En déduire la forme des lignes de champ.

2. Déduire du théorème d'Ampère le champ magnétique dans les 5 cas suivants: $z > a$, $z < 0$, $0 < z < a$ et $r < R$, $0 < z < a$ et $R < r < R + a$, $0 < z < a$ et $r > R + a$.

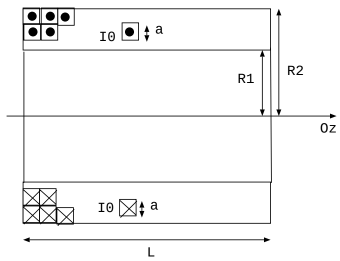
3. Calculer le flux du champ magnétique à travers une spire carrée, en déduire le flux du champ magnétique à travers tout le tore puis l'inductance du tore.

4. Calculer l'énergie magnétique présente dans tout le tore et en déduire l'inductance du tore. On précise que la densité volumique d'énergie magnétique s'écrit $u_m = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$.

Réponses : $B = \dfrac{\mu_0 .N.I}{2\pi r}$ *pour* $0 < z < a$ *et* $R < r < R + a$.

III. **Création d'un champ magnétique intense**

On utilise un solénoïde épais (épaisseur $e = R_2 - R_1$) considéré comme la superposition de solénoïdes infinis (en réalité de longueur $L >> R_2$) de même axe Oz. Il est réalisé par un empilement jointif de spires de section carrée, de côté $a = 1,0\ mm$, enroulées sur un cylindre de longueur $L = 4,0\ m$ depuis un rayon $R_1 = 20\ cm$ jusqu'à un rayon $R_2 = 25\ cm$. Les spires sont des fils de cuivre parcourus par un courant continu I_0 uniformément réparti, orienté dans le sens direct autour de Oz.



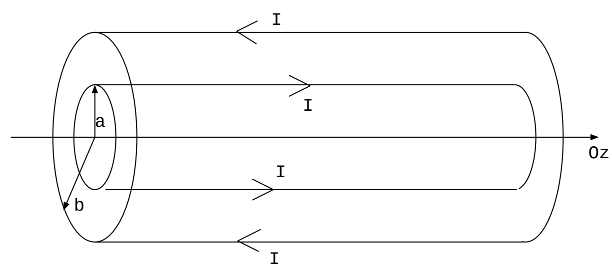
1. Préciser la nature des lignes de champ magnétique.

2. Montrer, en appliquant le théorème d'Ampère sur un contour bien choisi, que le champ magnétique est uniforme à l'extérieur du solénoide. On admet par la suite qu'il y est nul.

3. Etablir que l'expression du champ sur l'axe vaut $B = \mu_0 \dfrac{I(R_2 - R_1)}{a^2}$. Calculer I pour créer un champ de 1 $Tesla$. Donnée : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$.

IV. **Câble coaxial**

Un cale coaxial de longueur h est composé: d'une âme centrale (cylindre de rayon a) parcourue par un courant d'intensité I répartie uniformément sur sa surface et d'un cylindre de rayon $b > a$ parcouru par un courant en sens opposé, de même intensité I, répartie uniformément sur sa surface. On néglige les effets de bord.



1. Montrer que le champ magnétique s'écrit $\overrightarrow{B} = B(r)\overrightarrow{e_\theta}$ et préciser la forme des lignes de champ.

2. Déduire du théorème d'Ampère, le champ magnétique pour $r < a$, $a < r < b$ et $r > b$. Tracer la courbe $B(r)$ et commenter. Quel est l'intérêt d'un tel câble.

3. La densité volumique d'énergie magnétique en un point M est $u_m(M) = \dfrac{B(M)^2}{2\mu_0}$. Exprimer l'énergie magnétique emmagasinée par une longueur h de câble et en déduire l'inductance du câble.

Réponses: $B(r) = 0$ *pour* $r < a$ *et* $r > b$ *et* $B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $U_m = \dfrac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln(\dfrac{b}{a})$.

V. **Répartition non uniforme**

On considère un câble cylindrique de rayon a, d'axe Oz et de longueur l quasi infinie parcouru par un courant caractérisé par le vecteur densité $\overrightarrow{j}(r) = j_0 \dfrac{r}{a} \overrightarrow{e_z}$ pour $r \leq a$ (j_0 est une constante) et $\overrightarrow{j}(r) = \overrightarrow{0}$ pour $r > a$.

1. Montrer que $\overrightarrow{B} = B(r)\overrightarrow{e_\theta}$.

2. Calculer le champ magnétique sur l'axe soit $\overrightarrow{B}(r = 0)$.

3. Déduire de l'équation de Maxwell Ampère le champ magnétique créé par ce câble en tout point de l'espace. On donne en coordonnées cylindriques:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\overrightarrow{e_z}.$$

4. Plus dur : retrouver le résultat par application du théorème d'Ampère.

Réponses: $B = \dfrac{\mu_0 j_0 r^2}{3a}$ *pour* $r < a$ *et* $B = \dfrac{\mu_0 j_0 a^2}{3r}$ *pour* $r > a$.