J'apprends le cours d'électrostatique 3

1. Ecrire l'équation de Mawell-Gauss: $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon$

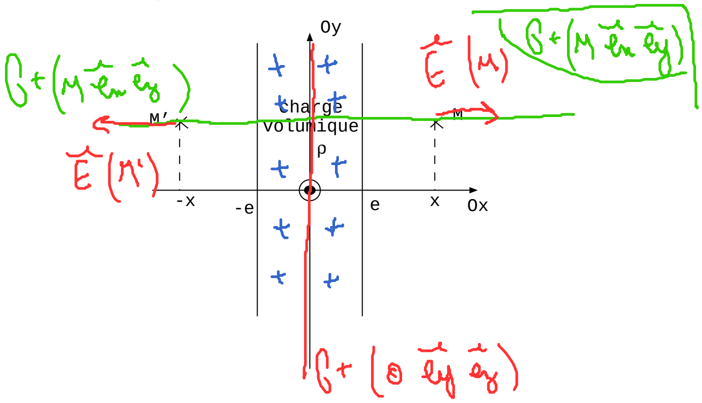
$\rho > 0$: $\vec{E}$ diverge autour des charges > 0

$\rho < 0$: $\vec{E}$ converge vers les charges < 0

2. Enoncer le théorème de Gauss:

Le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée est égale à la charge intérieure contenue dans le volume délimité par cette surface divisée par ε

3. Des charges sont réparties uniformément entre les plans d'équations $x = -e$ et $x = +e$. Déduire des symétries, la direction du champ électrique en M et déterminer la relation entre $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$.



$M \in \Pi^+(M\,\vec{e}_x\,\vec{e}_y)$ et $\Pi^+(M\,\vec{e}_x\,\vec{e}_z)$

donc $\vec{E}(M)$ est contenu dans ces 2 plans

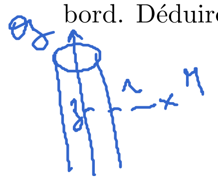
donc $\vec{E}$ selon (Ox)

M et M' sont symétriques / au plan $\Pi^+(O\,\vec{e}_y\,\vec{e}_z)$

donc les champs $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont symétriques / à ce plan d'après le schéma $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$

4. Donner l'expression mathématique du théorème de Gauss: $\Phi = \oiint \vec{E}(M)\,dS\,\vec{n}(M) = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon}$

5. Soit un cylindre de rayon R, de longueur L, uniformément chargé en volume. On néglige les effets de bord. Déduire des invariances la variable dont dépend le champ électrique.

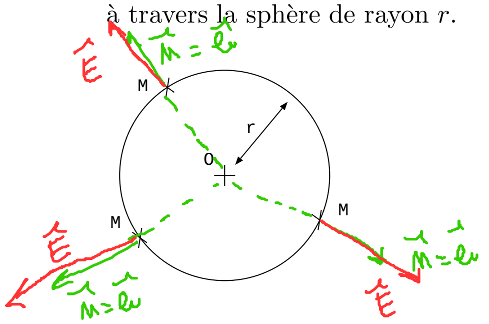


$$E(M) = E(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$$

invariance par translation selon (Oz)

invariance par rotation autour de Oz

6. Le champ électrique a pour expression $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques. Représenter aux différents puis M le champ électrique et le vecteur relatif à la normale sortante. Exprimer le flux de $\vec{E}$ à travers la sphère de rayon r.



$$\Phi = \oiint \vec{E}(M)\,dS\,\vec{n}(M)$$

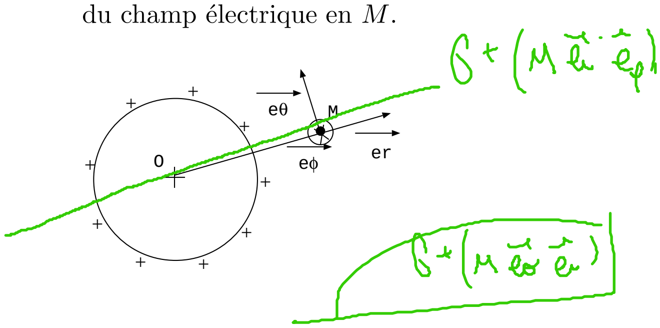
$$= \oiint E(r)\,\vec{e}_r\,dS\,\vec{e}_r$$

$$= E(r) \oiint dS$$

$E(r)$ est uniforme sur la sphère de rayon r

$$\Phi = E(r)\,4\pi r^2$$

7. Des charges sont réparties uniformément sur la surface d'une sphère. Déduire des symétries, la direction du champ électrique en M.

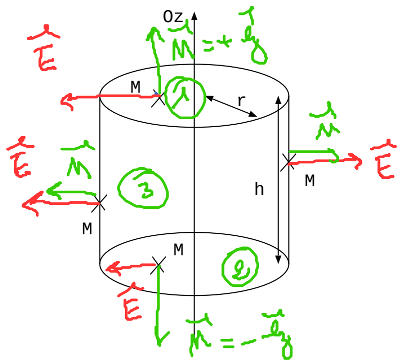


$M \in \Pi^+(M\,\vec{e}_r\,\vec{e}_\varphi)$ et $\Pi^+(M\,\vec{e}_r\,\vec{e}_\theta)$

donc $\vec{E}(M)$ est contenu dans ces 2 plans

donc $\vec{E}(M)$ selon $\vec{e}_r$

8. Le champ électrique a pour expression $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$ en coordonnées cylindriques. Représenter aux différents puis M le champ électrique et le vecteur relatif à la normale sortante. Exprimer le flux de $\vec{E}$ à travers un cylindre d'axe Oz, de rayon r et de hauteur h.

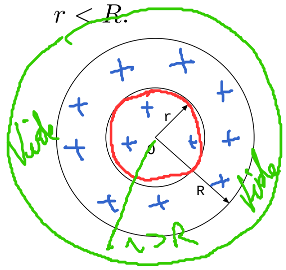


$$\phi = \oiint \vec{E}(M)\,dS\,\vec{n}(M)$$

$$= \underbrace{\iint_{1} E(r)\vec{e_r}\,dS\,\vec{e_z}}_{=0} + \underbrace{\iint_{2} E(r)\vec{e_r}\,dS(-\vec{e_z})}_{=0} + \iint_{3} E(r)\vec{e_r}\,dS\,\vec{e_r}$$

$$= E(r)\iint_{3} dS$$ ~~soit~~ $$\boxed{\phi = E(r)\,2\pi r h}$$

9. Des charges sont réparties uniformément dans le volume d'une sphère de rayon R et de centre O. On note ρ la densité volumique de charges. Exprimer la charge contenue dans la sphère de centre O et de rayon $r < R$.

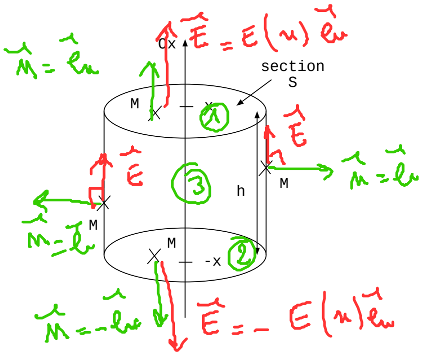


\+ charges présentes

$Q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$: charge dans la sphère de rayon $r < R$

Rq : $Q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$: charge dans la sphère de rayon $r > R$

10. Le champ électrique a pour expression $\vec{E} = E(x)\vec{e_x}$ tel que $\vec{E}(-x) = -\vec{E}(x)$. Représenter aux différents puis M le champ électrique et le vecteur relatif à la normale sortante. Exprimer le flux de $\vec{E}$ à travers un cylindre de section S compris entre les plans d'abscisse $-x$ et $+x$.

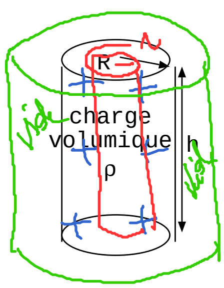


$$\phi = \oiint \vec{E}(M)\,dS\,\vec{n}(M)$$

$$= \iint_{1} E(x)\vec{e_x}\,dS\,\vec{e_x} + \iint_{2} -E(x)\vec{e_x}\,dS(-\vec{e_x}) + \underbrace{\iint_{3} E(x)\vec{e_x}\,dS\,\vec{e_r}}_{=0}$$

$$\boxed{\phi = 2E(x)S}$$

11. Des charges sont réparties uniformément à l'intérieur d'un cylindre de rayon R, d'axe Oz et de hauteur h. On note ρ la densité volumique de charges. Exprimer la charge contenue dans le cylindre de rayon $r < R$ et de hauteur h et de même axe Oz.



\+ charges présentes

$Q_{int} = \rho\,\pi r^2 h$: charges dans le cylindre de rayon $r < R$

Rq : $Q_{int} = \rho\,\pi R^2 h$: charges dans le cylindre de rayon $r > R$

12. Les charges sont uniformément réparties sur un disque contenu dans le plan Oxy. On néglige les effets de bord. Déduire des invariances les variables dont dépend le champ électrique.

$$E(M) = E(\cancel{x}, \cancel{y}, z)$$

le disque est infini dans les directions Ox et Oy donc il y a invariance par translation selon (Ox) et (Oy)