# Correction TD Gauss

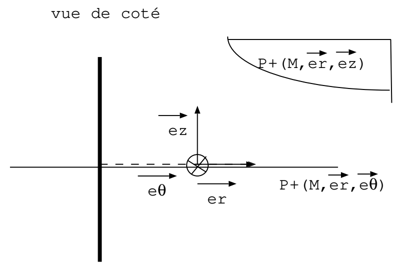
## I. **Champ créé par un fil**

On travaille en coordonnées cylindriques.

$M$ appartient aux plans $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$

donc $\overrightarrow{E}(M)$ appartient à ces plans

donc $\overrightarrow{E}(M)$ est selon $\overrightarrow{e_r}$.



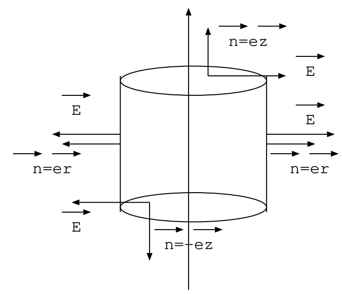

Il y a invariance par translation selon $Oz$ donc la variable $z$ est superflue.

Il y a invariance par rotation autour de $Oz$ donc la variable $\theta$ est superflue.

On a donc $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{e_r}$.

On choisit pour surface de Gauss un cylindre de rayon $r = HM$, de longueur $l$ et d'axe $Oz$. Seul le flux du champ électrique à travers la surface latérale n'est pas nul et on peut sortir $E(r)$ de l'intégrale car sur la surface latérale, le champ $E(r)$ est uniforme.

$\phi = 2\pi r l E(r)$




On applique le théorème de Gauss: $\phi = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ soit $\phi = 2\pi r l E(r) = \dfrac{Q}{\epsilon_0}$ donc $\overrightarrow{E} = \dfrac{Q}{2\pi r l \epsilon_0}\overrightarrow{e_r}$.

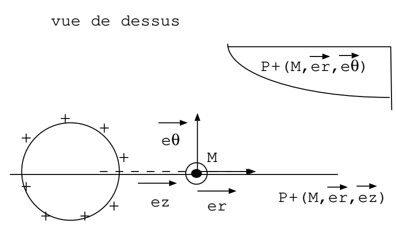
## II. **Champ créé par un cylindre chargé en surface**

On travaille en coordonnées cylindriques.

$M$ appartient aux plans $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$

donc $\overrightarrow{E}(M)$ appartient à ces plans

donc $\overrightarrow{E}(M)$ est selon $\overrightarrow{e_r}$.



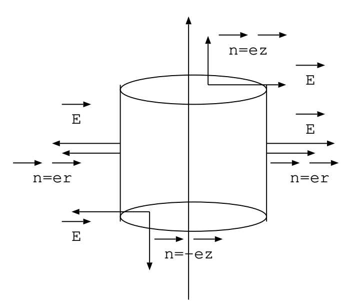

Il y a invariance par translation selon $Oz$ donc la variable $z$ est superflue.

Il y a invariance par rotation autour de $Oz$ donc la variable $\theta$ est superflue.

On a donc $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{e_r}$.

On choisit pour surface de Gauss un cylindre de rayon $r = HM$, de hauteur $h$ et d'axe $Oz$. Seul le flux du champ électrique à travers la surface latérale n'est pas nul et on peut sortir $E(r)$ de l'intégrale car sur la surface latérale, le champ $E(r)$ est uniforme.

$\phi = 2\pi r h E(r)$

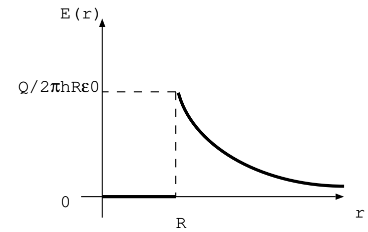



On applique le théorème de Gauss: $\phi = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0}$. On distingue deux cas:

Cas où $r < R$: il n'y a aucune charge dans le cylindre de Gauss, $Q_{int} = 0$ donc $\overrightarrow{E}(r < R) = \overrightarrow{E_+} = 0$.

Cas où $r > R$: le cylindre de Gauss contient toutes les charges du cylindre soit $Q_{int} = Q$ et $\overrightarrow{E}(r > R) = \overrightarrow{E_-} = \dfrac{Q}{2\pi h r \epsilon_0}\overrightarrow{e_r}$.

On observe que le champ électrique n'est pas continu. Cette anomalie vient du modèle utilisé. En réalité, les charges ne sont pas sur une surface, elles sont contenues dans des volumes. Cette discontinuité disparaît si l'on tient compte de l'épaisseur sur laquelle sont réparties ces charges.




**1.** On déduit le potentiel de la relation locale $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\dfrac{dV}{dr}\overrightarrow{e_r}$ soit $\dfrac{dV}{dr} = -E(r)$

Pour $r < R$: $\dfrac{dV}{dr} = -E_+(r) = 0$ donc $V(r < R) = A = V_0$ (car l'énoncé nous dit que le potentiel $V(r = 0) = V_0$.

Pour $r > R$: $\dfrac{dV}{dr} = -E_-(r) = -\dfrac{Q}{2\pi r h \epsilon_0}$ donc $V(r > R) = -\dfrac{Q}{2\pi h \epsilon_0}\ln(r) + C$. On trouve $C$ en écrivant la continuité du potentiel en $r = R$ soit $V(r = R^-) = V(r = R^+)$ soit $V_0 = -\dfrac{Q}{2\pi h \epsilon_0}\ln(R) + C$ d'où la valeur de $C$.

## III. **Champ créé par un parallélépipède**

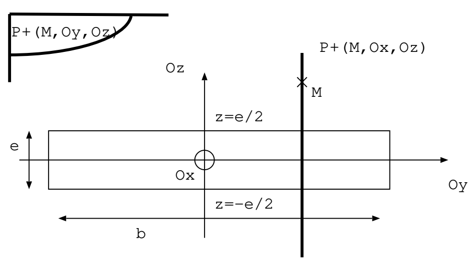
**1.** $M$ appartient aux plans $P^+(M, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ et $P^+(M, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

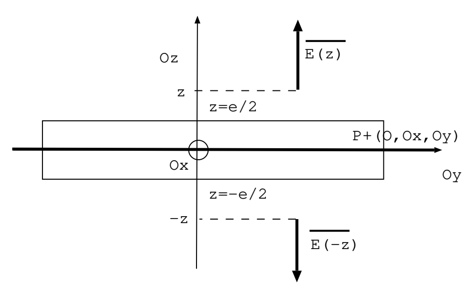
donc $\overrightarrow{E}(M)$ appartient à ces plans

donc $\overrightarrow{E}(M)$ est selon $\overrightarrow{e_z}$.

Il y a invariance par translation selon $Ox$ et $Oy$ donc les variables $x$ et $y$ sont superflues.

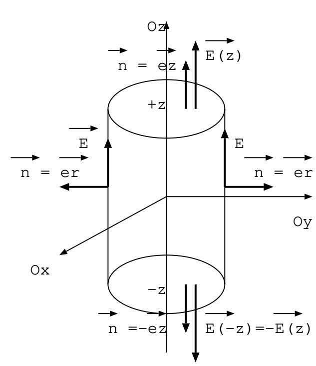
On a donc $\overrightarrow{E}(M) = E(z)\overrightarrow{e_z}$.



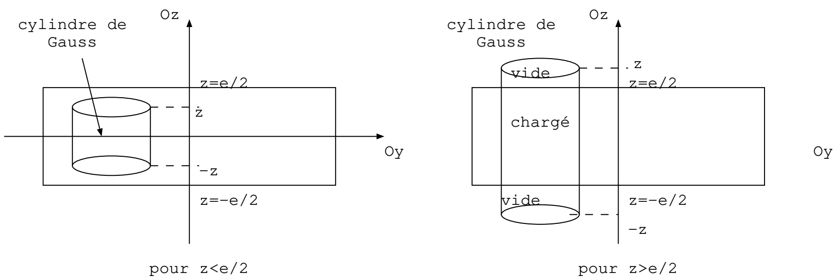

De plus le plan $P(O, Ox, Oy)$ est un plan $P^+$ donc en deux points symétriques par rapport à ce plan, tels que les points $M(z)$ et $M'(-z)$, les potentiels sont égaux et les champs électriques sont symétriques. D'après le schéma on a $\overrightarrow{E}(-z) = -\overrightarrow{E}(z)$.

**2.** Le flux du champ électrique est nul sur la surface latérale du cylindre. Les flux du champ électrique sur les surfaces en $z$ et en $-z$ sont identiques, on a donc $\phi = 2E(z)S$.



**3.** Attention, la variable $z$ est positive.

On applique le théorème de Gauss: $\phi = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0}$. On distingue deux cas: $0 < z < e/2$ et $z > e/2$.




Pour $0 < z < e/2$:
$Q_{int} = \rho_0 S 2z$ soit d'après le théorème de Gauss: $\phi = 2E(z)S = \dfrac{\rho_0 S 2z}{\epsilon_0}$ donc $\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0 z}{\epsilon_0}\overrightarrow{e_z}$

Pour $z > e/2$:
$Q_{int} = \rho_0 S e$ soit d'après le théorème de Gauss: $\phi = 2E(z)S = \dfrac{\rho_0 S e}{\epsilon_0}$ donc $\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0 e}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_z}$

Pour trouver les expressions du champ pour $z < 0$, on utilise $\overrightarrow{E}(-z) = -\overrightarrow{E}(z)$.

Soit pour $-e/2 < z < 0$: $\overrightarrow{E}(z) = -\dfrac{\rho_0(-z)}{\epsilon_0}\overrightarrow{e_z}$

Soit pour $z < -e/2$: $\overrightarrow{E}(z) = -\dfrac{\rho_0 e}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_z}$

**4.** On utilise la relation $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\dfrac{dV}{dz}\overrightarrow{e_z}$ soit $\dfrac{dV}{dz} = -E(z)$.

Pour $-e/2 < z < e/2$: $\dfrac{dV}{dz} = -E(z) = -\dfrac{\rho_0 z}{\epsilon_0}$ donc $V(z) = -\dfrac{\rho_0 z^2}{2\epsilon_0} + A$. On trouve $A$ avec la condition donnée dans l'énoncé, $V(z=0) = 0 = A$.

Pour $z > e/2$: $\dfrac{dV}{dz} = -E(z) = -\dfrac{\rho_0 e}{2\epsilon_0}$ donc $V(z) = -\dfrac{\rho_0 e z}{2\epsilon_0} + B$. On trouve $B$ en écrivant la continuité du potentiel en $z = e/2$. Soit $V(z = e/2) = -\dfrac{\rho_0 e^2}{8\epsilon_0} = -\dfrac{\rho_0 e^2}{4\epsilon_0} + B$.

Pour $z < -e/2$: $\dfrac{dV}{dz} = -E(z) = +\dfrac{\rho_0 e}{2\epsilon_0}$ donc $V(z) = +\dfrac{\rho_0 e z}{2\epsilon_0} + C$. On trouve $C$ en écrivant la continuité du potentiel en $z = -e/2$. Soit $V(z = -e/2) = -\dfrac{\rho_0 e^2}{8\epsilon_0} = +\dfrac{\rho_0 e^2}{4\epsilon_0} + C$.

## IV. **Equation de Poisson**

Maxwell Faraday: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$ (en électrostatique) donc il existe un potentiel $V$ tel que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$.

Maxwell Gauss: $\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ qui donne $-\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{V}) = -\Delta\mathrm{V} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ soit l'équation de Poisson: $\Delta V = \dfrac{-\rho}{\epsilon_0}$.

Il y a invariance par rotation autour du point $O$ donc le potentiel ne dépend ni de $\theta$, ni de $\phi$ soit $V = V(r)$ et $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2(rV)}{dr^2}$.

A l'intérieur de la sphère on doit résoudre $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2(rV)}{dr^2} = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ soit $\dfrac{d^2(rV)}{dr^2} = -\dfrac{\rho r}{\epsilon_0}$.

On primitive deux fois par rapport à $r$: $rV(r) = -\dfrac{\rho r^3}{6\epsilon_0} + Ar + B$ soit $V(r) = -\dfrac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + A + \dfrac{B}{r}$.

Le terme $B/r$ diverge quand $r$ tend vers 0 donc on doit prendre $B = 0$.

D'après l'énoncé $V(r=0) = V_0 = A$ donc $V(r) = -\dfrac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + V_0$.

A l'extérieur de la sphère on doit résoudre $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2(rV)}{dr^2} = 0$ soit $\dfrac{d^2(rV)}{dr^2} = 0$.

On primitive deux fois par rapport à $r$: $rV(r) = Cr + D$ soit $V(r) = C + \dfrac{D}{r}$. On a $C = 0$ car le potentiel est nul loin de la sphère.

On trouve la constant $D$ en écrivant la continuité du potentiel en $r = R$: $V(r = R^-) = V(r = R^+)$ soit $-\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + V_0 = \frac{D}{R}$, on en déduit $D$.

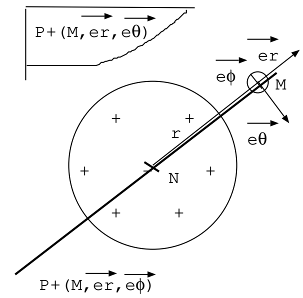
## V. **Symétrie sphérique**

**1.** On repère $M$ par ses coordonnées sphériques.

$M$ appartient aux plans $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\phi})$ donc $\overrightarrow{E}(M)$ appartient ces plans donc $\overrightarrow{E}(M)$ est selon $\overrightarrow{e_r}$.

Il y a invariance par rotation autour de tout axe passant par $O$ donc le champ électrique ne dépend que de $r$.

On a donc $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{e_r}$.




L'équation de Maxwell Gauss s'écrit $\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (en toute rigueur on devrait plutôt écrire $\mathrm{div}\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \frac{\rho(\mathrm{M})}{\epsilon_0}$).

Le champ électrique s'écrit $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{e_r}$ donc $E_r = E(r)$, $E_\theta = E_\phi = 0$ soit $\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\mathrm{d(r^2E(r))}}{\mathrm{dr}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

A l'intérieur de la sphère, pour $r < b$, la charge est uniformément répartie donc la densité volumique de charge est uniforme et s'écrit $\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi b^3}{3}} = \frac{3Q}{4\pi b^3}$.

On doit donc résoudre $\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\mathrm{d(r^2E(r))}}{\mathrm{dr}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Soit $\frac{d(r^2E(r))}{dr} = \frac{\rho r^2}{\epsilon_0}$

En primitivant: $r^2E(r) = \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} + A$

d'où: $E(r) = E_+(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} + \frac{A}{r^2}$

Le terme $\frac{A}{r^2}$ diverge quand $r$ tend vers zéro donc on doit prendre $A = 0$ donc $E(r) = E_+(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$.

A l'extérieur de la sphère, pour $r > b$, il n'y a pas de charge donc $\rho = 0$.

On doit donc résoudre $\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\mathrm{d(r^2E(r))}}{\mathrm{dr}} = 0$

Soit $\frac{d(r^2E(r))}{dr} = 0$

En primitivant: $r^2E(r) = B$ et $E(r) = \frac{B}{r^2}$.

On trouve la constante $B$ en écrivant la continuité du champ électrique en $r = b$ soit $E_+(r = b) = E_-(r = b)$ soit $\frac{\rho b}{3\epsilon_0} = \frac{B}{b^2}$ soit $B = \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0}$ et $E_-(r) = \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0 r^2}$.

**2.** Application : la distribution de charges est équivalente à une grande sphère de centre $O_1$ chargée positivement avec une densité volumique de charges $+\rho$ (distribution $D_1$) et une petite sphère de centre $O_2$ chargée négativement avec une densité volumique de charges $-\rho$ (distribution $D_2$).

Pour la suite on utilise l'expression du champ $\overrightarrow{E_+}(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\overrightarrow{e_r}$ avec $r\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{OM}$ donc $\overrightarrow{E_+}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon}\overrightarrow{OM}$.

Le champ électrique en un point $M$ de la cavité de la distribution $D$ est égale à la somme du champ électrique créé en $M$ par $D_1$ soit $E_1(r) = \frac{\rho}{3\epsilon}\overrightarrow{O_1M}$ et du champ électrique créé en $M$ par $D_2$ soit $E_2(r) = \frac{-\rho}{3\epsilon}\overrightarrow{O_2M}$.

On a donc $\overrightarrow{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon}\overrightarrow{O_1M} - \frac{\rho}{3\epsilon}\overrightarrow{O_2M} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$: le champ dans la cavité est uniforme, il ne dépend pas de $M$, il est dirigé selon $\overrightarrow{O_1O_2}$.

## VI. **Polarisabilité électronique d'un atome**

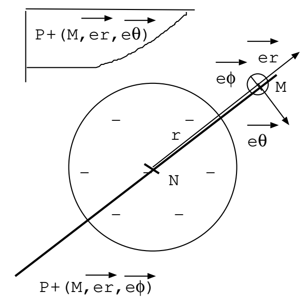
**1.** Soit la sphère de centre $N$, de rayon $a$ portant la charge $-Ze$ uniformément répartie. A l'intérieur de la sphère la densité volumique de charges est uniforme et s'écrit $\rho = \frac{-Ze}{\frac{4\pi a^3}{3}} = \frac{-3Ze}{4\pi a^3}$ et à l'extérieur de la sphère, la densité volumique de charges est nulle.

On repère $M$ par ses coordonnées sphériques.

$M$ appartient aux plans $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\phi})$ donc $\overrightarrow{E}(M)$ appartient ces plans donc $\overrightarrow{E}(M)$ est selon $\overrightarrow{e_r}$.

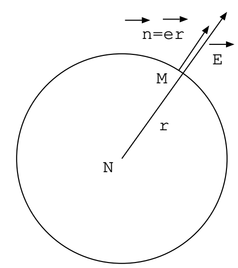
Il y a invariance par rotation autour de tout axe passant par $O$ donc le champ électrique ne dépend que de $r$.

On a donc $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{e_r}$.




2

On choisit pour surface de Gauss une sphère de centre $N$ et de rayon $r = OM$: $\Phi = \oiint \overrightarrow{E}(M) dS(M) \overrightarrow{n}(M) = \oiint E(r)\overrightarrow{e_r} dS \overrightarrow{e_r} = E(r) \oiint dS = E(r) 4\pi r^2$.

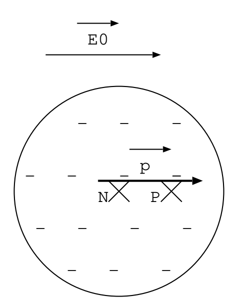



On applique le théorème de Gauss: $\Phi = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$. Dans le cas où $r < a$, la charge intérieure est la charge contenue dans la sphère de rayon $r$ soit $Q_{int} = \rho \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{-Zer^3}{a^3}$.

On a donc $\Phi = E(r)4\pi r^2 = \frac{-Zer^3}{a^3 \epsilon_0}$ soit $\overrightarrow{E}(M) = \frac{-Zer}{4\pi\epsilon_0 a^3}\overrightarrow{e_r}$.

**2.** Le nuage électronique se déplace dans le sens opposé à $\overrightarrow{E_0}$, le noyau est très lourd par rapport aux électrons c'est pour cela qu'on néglige son déplacement.

Le noyau subit la force électrique $\overrightarrow{F_e} = Ze(\overrightarrow{E_0} + \overrightarrow{E})$ et son poids que l'on néglige par rapport à la force électrique. Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est le champ créé en $P$ par le nuage électronique soit $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(P) = \frac{-Zer}{4\pi\epsilon_0 a^3}\overrightarrow{e_r}$ avec $r\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{NP}$ soit $\overrightarrow{E}(P) = \frac{-Ze}{4\pi\epsilon_0 a^3}\overrightarrow{NP}$.




A l'équilibre du noyau on a $\overrightarrow{F_e} = Ze(\overrightarrow{E_0} + \overrightarrow{E}(P)) = \overrightarrow{0}$ soit $\overrightarrow{E_0} = -\overrightarrow{E}(P) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a^3}\overrightarrow{NP}$ ou encore $\overrightarrow{NP} = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{Ze}\overrightarrow{E_0}$.

Le moment dipolaire du dipole induit est $\overrightarrow{p} = Ze\overrightarrow{NP} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \overrightarrow{E_0}$. Par identification la polarisabilité électronique s'écrit $\alpha = 4\pi a^3$: elle est d'autant plus grande que l'atome est gros. Effectivement quand l'atome est de grande taille, le nuage électronique se déforme plus facilement.

**3.** On a $\overrightarrow{NP} = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{Ze}\overrightarrow{E_0}$ donc en norme $NP = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{ZeE_0}$.

Hélium: $Z = 1$ et l'ordre de grandeur de la taille de l'atome est $a \approx 10^{-10}\ m$ soit $NP = \frac{4\pi 8,8.10^{-12}(10^{-10})^3}{1,6.10^{-19}10^4} \approx 10^{-25}\ m$.