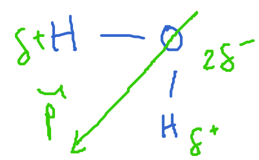
J'apprends le cours sur les dipôles électriques

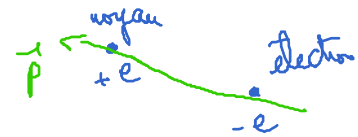
1. Définir la notion de dipôle électrique et donner deux exemples.

Un dipôle est un système électriquement neutre dans lequel le barycentre des charges positives ne coïncident pas avec le barycentre des charges négatives. Il est caractérisé par son moment dipolaire $\vec{p} = q\vec{NP}$

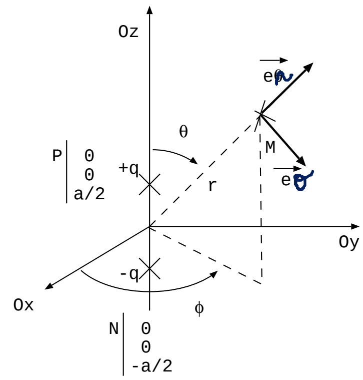
molécule d'eau



atome d'hydrogène



On adopte les notations suivantes pour un dipôle comprenant les charges $+q$ et $-q$ de coordonnées respectives $(0,0,a/2)$ et $(0,0,-a/2)$. M est repéré par ses coordonnées sphériques.



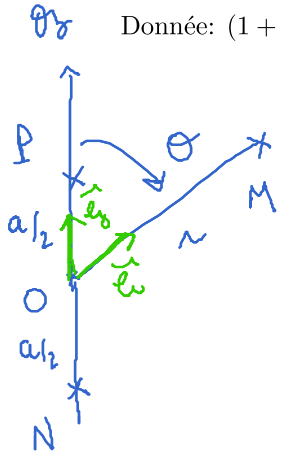
2. Exprimer le moment dipolaire $\vec{p}$ de ce dipôle.

$\vec{p} = q\vec{NP} = qa\,\vec{e_z}$

3. Dire en quoi consiste l'approximation dipolaire.

L'approximation dipolaire consiste à étudier le champ lointain créé par un dipôle et à faire des DL à l'ordre le plus bas non nul en $\frac{a}{r}$ où a est la taille du dipôle et r la distance entre le dipôle et le point M.

4. Démontrer dans l'approximation dipolaire $\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta)$. En déduire l'expression de $\frac{1}{NM}$.
Donnée: $(1+\epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$ pour $\epsilon << 1$.



$PM^2 = \vec{PM}^2 = (\vec{PO}+\vec{OM})^2 = (-\frac{a}{2}\vec{e_z} + r\vec{e_r})^2 = \frac{a^2}{4} - ar\,\underbrace{\vec{e_z}\cdot\vec{e_r}}_{\cos\theta} + r^2$

soit $PM^2 = r^2\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)$

$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{a}{r}\cos\theta\right) = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$

DL à l'ordre 1 en a/r

$NM^2 = \vec{NM}^2 = (\vec{NO}+\vec{OM})^2 = \left(+\frac{a}{2}\vec{e_z} + r\vec{e_r}\right)$

par analogie on a : $\frac{1}{NM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a}{r}\cos\theta\right)$

5. Déduire des invariances et des symétries les variables du champ électrique et les vecteurs dont il dépend.

Il y a invariance par rotation autour de Oz donc la variable φ n'intervient pas.

$M \in \mathcal{P}^+(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

donc $\vec{E}(M)$ contenu dans ce plan

donc $\vec{E}(M)$ selon $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$

6. On donne: $\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta)$ et $\frac{1}{NM} = \frac{1}{r}(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta)$ dans l'approximation dipolaire.

En coordonnées sphériques: $\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\vec{e_\phi}$.

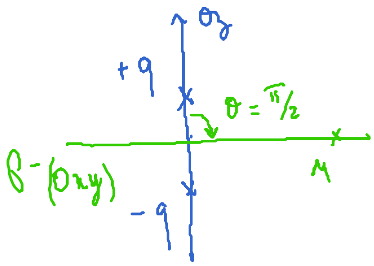
Exprimer le potentiel et le champ électrique en M dans l'approximation dipolaire.

$$V(M) = V_P(M) + V_N(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon PM} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon NM} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}\left[\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right) - \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)\right]$$

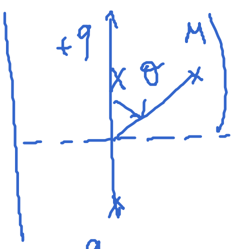
d'où $\boxed{V(M) = \frac{aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}}$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}\right]\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}\right]\vec{e_\theta} = \frac{2aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{e_r} + \frac{aq\sin\theta}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{e_\theta}$$

7. Justifier le fait que le potentiel est nul pour $\theta = \cancel{0}\ \frac{\pi}{2}$ et qu'il est positif pour $\theta < \pi/2$.

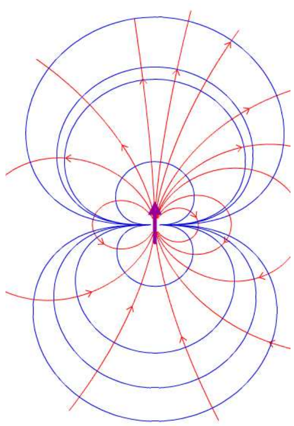


Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, le point M est sur le plan P-(Oxy) qui est une équipotentielle 0 V.

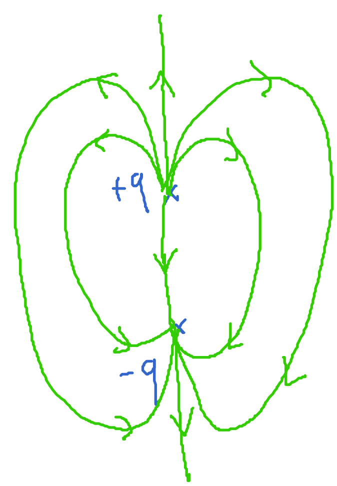


zone où $\theta < \frac{\pi}{2}$: M est plus près de la charge positive donc le potentiel en M est positif.

8. On donne la carte de champ créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire. Commenter cette carte et tracer l'allure des lignes de champ d'un dipôle quand on ne fait pas l'approximation dipolaire.

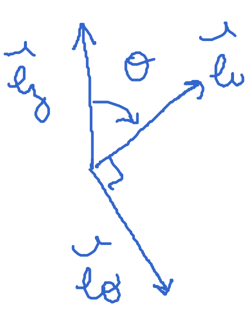


Sur cette carte, les lignes de champ électrique se referment sur elles-mêmes. Cette anomalie est liée au fait que ces lignes ne sont valables que dans l'approximation dipolaire soit que loin du dipôle.



Les lignes de champ partent de la charge +q et vont vers la charge -q

9. On donne les expressions intrinsèques du potentiel et du champ électriques: $V(M) = \frac{\vec{p}.\overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 OM^3}$ et $\vec{E}(M) = \frac{3(\vec{p}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{OM} - \vec{p}OM^2}{4\pi\epsilon_0 OM^5}$. Retrouver les expressions du potentiel et du champ en coordonnées sphériques.



$\vec{p} = aq\,\vec{e_z}$ $\quad \overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}$ $\quad \vec{p}\cdot\overrightarrow{OM} = aqr\,\vec{e_r}\cdot\vec{e_z} = aqr\cos\theta$

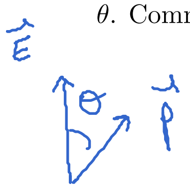
$\vec{p} = aq\,\vec{e_z} = aq\left[\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right]$

$$V(M) = \frac{aqr\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{3(aqr\cos\theta)\,r\,\vec{e_r} - aqr^2\left[\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right]}{4\pi\varepsilon r^5} = \frac{aq}{4\pi\varepsilon r^3}\left[2\cos\theta\,\vec{e_r} + \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right]$$

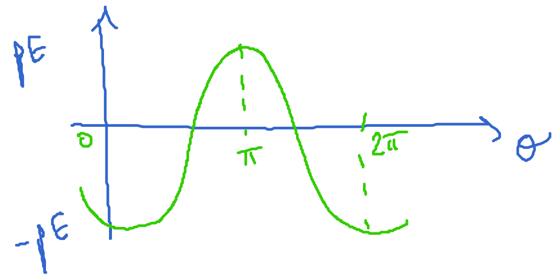
Donnée : $E_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

10. Soit un dipôle de moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ placé dans un champ électrique $\overrightarrow{E}$. On note θ l'angle entre les deux vecteurs. Exprimer l'énergie potentielle du dipôle et tracer la courbe énergie potentielle en fonction de θ. Commenter cette courbe.



$E_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

$= -pE\cos\theta$



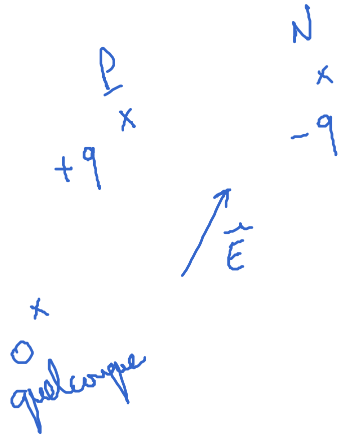
$\theta = 0$ est une position d'équilibre stable

$\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}$

$\theta = \pi$ est une position d'équilibre instable

$\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{E}$

11. Exprimer la force et le couple subis par un dipôle modélisé par une charge $+q$ et $-q$ distantes de a, placé dans un champ électrique uniforme. En déduire le mouvement d'un dipôle dans un champ électrique uniforme.



$\vec{F} = +q\vec{E} - q\vec{E} = \vec{0}$ le dipôle ne translate pas

$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}}_O(+q\vec{E}) + \vec{\mathcal{M}}_O(-q\vec{E})$

$= \overrightarrow{OP}\wedge q\vec{E} + \overrightarrow{ON}\wedge(-q\vec{E})$

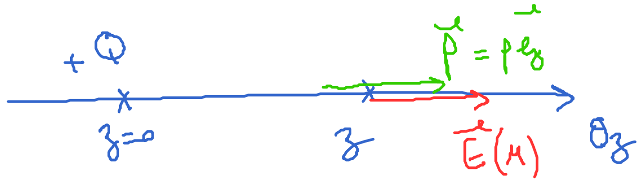
$= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON})q\wedge\vec{E}$

$= q\overrightarrow{NP}\wedge\vec{E}$

$= \vec{p}\wedge\vec{E}$

le dipôle tourne jusqu'à ce que $\vec{p}$ et $\vec{E}$ soient colinéaires ($\vec{\Gamma} = \vec{0}$)

12. On considère la molécule de méthanal CH_2O de moment dipolaire $\overrightarrow{p} = p\overrightarrow{e_z}$ avec $p > 0$. Ce dipôle est placé en M sur l'axe Oz à la côte z. En O se trouve un cation portant une charge $+Q$. Exprimer et commenter la force subie par le dipôle pour $z > 0$. On donne la force exercée par un champ électrique sur un dipôle placé en M: $\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{p}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{E}(M)$.



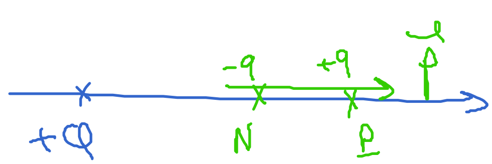
le cation crée en M le champ électrique : $\vec{E}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\vec{e}_z$

$\vec{p}\cdot\vec{\text{grad}} = p\vec{e}_z\cdot\dfrac{d}{dz}\vec{e}_z = p\dfrac{d}{dz}$

$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{E} = p\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\vec{e}_z\right) = \underbrace{-\dfrac{2Qp}{4\pi\varepsilon_0 z^3}\vec{e}_z}_{\text{selon } -\vec{e}_z}$

donc le dipôle subit une force attractive de la part du cation

explication :



ici le dipôle est orienté de telle sorte que la charge $-q$ du dipôle est la + proche de $+Q$ donc le cation attire la charge $-q$, il attire le dipôle