

# TD dipôle magnétique

## I. Estimation de la taille du noyau terrestre

1. Dans le modèle de Bohr, l'électron de l'atome d'hydrogène décrit une orbite circulaire autour du noyau. On note  $R$ , le rayon de l'orbite,  $V$  la vitesse de l'électron,  $-e$  la charge et  $m$  la masse de l'électron. Données:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ .

1.a. Représenter la trajectoire de l'électron et exprimer en fonction des données son moment cinétique  $\vec{L}_O$  par rapport au noyau placé en  $O$  à l'origine du repère.

1.b. Exprimer le moment magnétique orbital  $\vec{M}$  de la boucle de courant créée par le mouvement de l'électron

1.c. Dans le modèle de Bohr, le moment cinétique de l'électron est quantifié:  $L_O = n\hbar$ . En déduit que le moment magnétique associé à l'électron est quantifié. On appelle magnéton de Bohr noté  $\mu_B$ , le moment magnétique pour  $n = 1$ , exprimer et calculer  $\mu_B$  (on donne  $\hbar = 10^{-34} \text{ J.s}$ ).

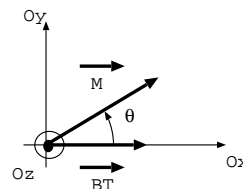
2. Le magnétisme terrestre est assimilé à celui d'un aimant géant situé au centre de la Terre de moment magnétique  $\mathcal{M} = 8,1 \cdot 10^{22} \text{ A.m}^2$ . En déduire le nombre  $N$  d'atomes de la matière aimantée constituant le noyau terrestre sachant que chaque atome concerné porte un moment magnétique de l'ordre du magnéton de Bohr  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ . Données:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ ,  $N_a = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

3. En prenant des valeurs moyennes pour la masse molaire et pour la masse volumique (mélange de fer et de nickel) soit  $M = 57 \text{ g.mol}^{-1}$  et  $\rho = 8,1 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ , estimer le volume de matière concerné et en déduire le rayon  $R$  du noyau terrestre interne supposé sphérique. Le rayon du noyau interne est en fait de  $1200 \text{ km}$ . Commenter.

Réponse:  $R = 290 \text{ km}$

## II. Méthode des oscillations

On considère une boussole de moment magnétique  $\vec{M}$  libre de tourner sans frottements autour de l'axe vertical  $Oz$ . La composante horizontale du champ magnétique terrestre s'écrit  $\vec{B}_T = B_T \vec{e}_x$ , on cherche à la mesurer. Le moment d'inertie de la boussole par rapport à  $Oz$  est noté  $J$ . On note  $\theta$  l'angle entre  $\vec{B}_T$  et  $\vec{M}$ .



1. On donne l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre le moment magnétique  $\vec{M}$  et le champ magnétique  $\vec{B}_T$ :  $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_T$ . Tracer la courbe énergie potentielle en fonction de  $\theta$  et en déduire les positions d'équilibre stable et instable.

2. On donne l'expression du couple exercé par le champ magnétique  $\vec{B}_T$  sur le moment magnétique  $\vec{M}$ :  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_T$ . À l'aide du théorème de mécanique adapté, déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ . En déduire la période  $T_0$  des petites oscillations de la boussole. En déduire quelles données sont nécessaires si on veut déduire  $B_T$  d'une mesure de cette période  $T_0$ .

3. On modifie maintenant l'expérience en ajoutant un champ magnétique  $\vec{B}_0$  supplémentaire de norme  $B_0$  connue inférieure à  $B_T$  et qu'on peut orienter selon  $\vec{e}_x$  ou  $-\vec{e}_x$ . On mesure une période  $T$  pour de petites oscillations quand  $\vec{B}_0 = +B_0 \vec{e}_x$  et une période  $T'$  quand  $\vec{B}_0 = -B_0 \vec{e}_x$ .

3.a. Expérimentalement, comment produire un champ magnétique  $\vec{B}_0$  approximativement homogène dont on peut contrôler facilement le sens ?

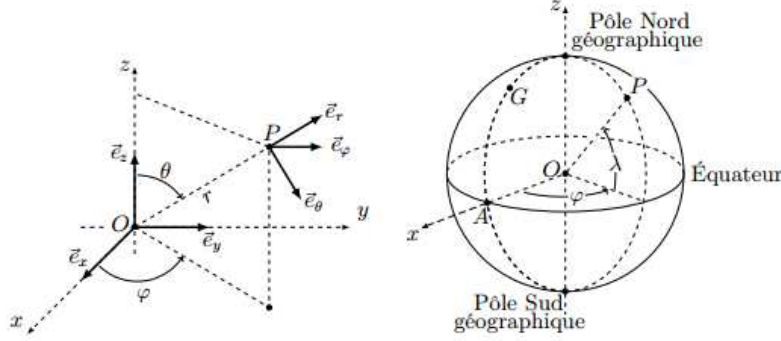
3.b. Exprimer alors  $B_T$  en fonction uniquement de  $B_0$ ,  $T$  et  $T'$ . Pourquoi cette variante de l'expérience est-elle plus pratique pour mesurer  $B_T$ ?

Réponses: 2-  $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MB_T}}$  3-  $B_T = B_0 \frac{T'^2 - T^2}{T'^2 + T^2}$

### III. Champ magnétique terrestre

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique  $\vec{M} = -\mathcal{M}_l \vec{e}_z$  disposé au centre  $O$  de la Terre (assimilée à une sphère de rayon  $R_T$ ), l'axe  $(Oz)$  étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord. On rappelle qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques  $\phi$  (longitude) et  $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$  (latitude). Données:  $\mathcal{M}_l = 7,9 \cdot 10^{22} \text{ A.m}^2$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  et  $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$ .

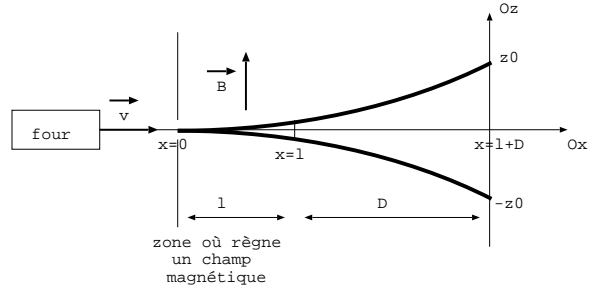
Le champ magnétique créé en un point  $M$  par un dipôle  $\vec{M}$  placé en  $O$  est:  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{OM}(\vec{M} \cdot \vec{OM}) - OM^2 \vec{M}}{OM^5}$



1. Exprimer le champ magnétique en coordonnées sphériques, en fonction de  $\mu_0$ ,  $\mathcal{M}_0$ ,  $r$ ,  $\theta$ ,  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ .
  2. Déterminer l'équation de ligne de champ magnétique passant par  $\theta = \pi/2$  et  $r = r_0$ . On donne:  $d\vec{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\phi\vec{e}_\phi$ .
  3. Calculer le champ magnétique au pôle nord, à l'équateur et à Toulon de latitude  $\lambda = 43^\circ$  nord.
- Réponses: 2- ligne de champ  $\rho = \rho_0 \sin^2 \theta$  3- Au pôle nord  $B = 61 \mu T$

### IV. Expérience de Stern et Gerlach

Dans une enceinte où règne une faible pression est placé un four contenant du lithium porté à la température  $T$ . Un ensemble d'ouvertures pratiquées dans le four permet d'obtenir un jet homocinétique d'atomes de lithium d'énergie cinétique  $E_c = \frac{mv_0^2}{2}$  et de vitesse  $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ . La pesanteur est négligée.



1. Calculer la température  $T$  pour  $E_c = 1,6 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ . Donnée:  $k_B = 1,3 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ .
2. Les atomes de lithium traversent une zone comprise entre les plans  $x = 0$  et  $x = l$ , où règne un champ magnétique  $\vec{B} = kx\vec{e}_z$  ( $k$  est une constante positive). En dehors de cette zone le champ magnétique est nul. On constate que le jet est dévié en deux et que les deux points d'impact sur la plaque sont symétriques, situés en  $z = +z_0$  et  $z = -z_0$ .

**2.a.** La déviation peut-elle s'expliquer par la force de Lorentz subie par les atomes ? La déviation s'explique en attribuant un moment magnétique  $\vec{M} = \mathcal{M}_x \vec{e}_x + \mathcal{M}_y \vec{e}_y + \mathcal{M}_z \vec{e}_z$  aux atomes de lithium. On rappelle  $\vec{F} = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}$ . Exprimer la force exercée sur un atome dans la zone où règne le champ magnétique. Montrer que l'équation de la trajectoire d'un atome dans la zone où règne le champ magnétique s'écrit  $z = \frac{\mathcal{M}_z k x^2}{4E_c}$ .

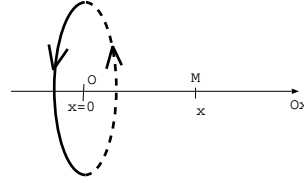
**2.b.** Quelle est la nature de la trajectoire lorsque l'atome est dans la zone où il n'y a pas de champ magnétique? Montrer que  $z_0 = \frac{\mathcal{M}_z k l}{4E_c} (l + 2D)$ .

**2.c.** Les atomes de lithium n'ont pas de moment cinétique orbital, mais uniquement un moment cinétique de spin  $M_z = \frac{\pm \mu_B}{2}$ . Calculer  $z_0$  pour  $l = 10 \text{ cm}$ ,  $D = 1 \text{ m}$ ,  $k = 10 \text{ T.m}^{-1}$  et  $\mu_B = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$ .

Réponses: 1-  $T = 820 \text{ K}$  2a-  $\vec{F} = \mathcal{M}_z k \vec{e}_z$  2d-  $z_0 = 0,30 \text{ mm}$ .

## V. Aimant placé au centre d'une bobine

1. On donne le champ magnétique créé par une spire (de rayon  $R$ , de centre  $O$  et parcouru par un courant  $I$ ) en un point  $M$  de son axe de symétrie noté  $Ox$ .



$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{R^2})^{3/2}}$$

Utiliser les symétries pour trouver la direction du champ magnétique en  $M$ .

Déduire de l'expression de  $B(x)$ , la relation entre  $\vec{B}(x)$  et  $\vec{B}(-x)$ . Vérifier la cohérence du résultat par les propriétés de symétrie.

En quel point de l'axe, le champ magnétique est-il maximal? quelle est alors sa valeur?

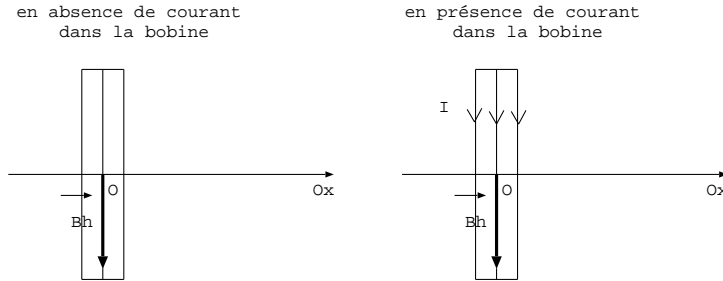
2. Soit un dipôle de moment magnétique  $\vec{M}$  placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Rappeler la position d'équilibre stable de ce dipôle. Donnée: l'énergie potentielle d'un dipôle  $\vec{M}$  placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  s'écrit  $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ .

3. On se propose de mesurer la norme de la composante horizontale notée  $\vec{B}_h$  du champ magnétique terrestre en un lieu. Pour cela on dispose d'une petite aiguille aimantée montée sur pivot, donc mobile autour d'un axe vertical sans frottements. Ce petit aimant de moment magnétique  $\vec{M}$  est placé **au centre  $O$  d'une bobine** plate comportant  $N$  spires circulaires de rayon  $R$  chacune (on néglige la section des fils) contenue dans un plan vertical et alimentée par un courant continu d'intensité  $I$  réglable.

Dans la suite on note  $\vec{B}_b$ , le champ magnétique créé par la bobine en son centre,  $\vec{B}_h$ , la composante horizontale du champ magnétique terrestre et  $\vec{B}_t$ , le champ magnétique résultant au centre de la bobine.

On observe que l'aiguille tourne d'un angle  $\alpha$  lorsque l'intensité dans la bobine passe d'une valeur nulle à  $I$ .

Ajouter sur les schémas l'orientation du dipôle magnétique  $\vec{M}$  de l'aimant en absence et en présence de courant dans la bobine.



Exprimer  $B_h$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\mu_0$ ,  $N$ ,  $I$  et  $R$ .

AN: calculer  $B_h$  à Paris sachant que  $N = 5$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $R = 12 \text{ cm}$ ,  $I = 0,38 \text{ A}$  et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

Réponses: 1-  $\vec{B}(-x) = \vec{B}(x)$  2-  $B_h = \frac{\mu_0 N I}{2R \tan \alpha}$