

## Chapitre EM 4 : théorème de Gauss et applications

## I. Densité volumique de charges

Les charges sont réparties dans des volumes (noyau, atome, molécules, armatures d'un condensateur,...). On définit  $\rho$ , la densité volumique de charges par:

$$\rho(M) = \frac{dq(M)}{dV(M)}$$

où  $dq$  est la charge contenue dans le volume élémentaire du point  $M$

$$[\rho] = C \cdot m^{-3}$$

$\rho$  est un nombre positif ou négatif d'unité:



(ou décrit le volume en petit élément de volume  $dV$ )

Quand  $\rho$  est donnée on peut calculer la charge contenue dans un volume:

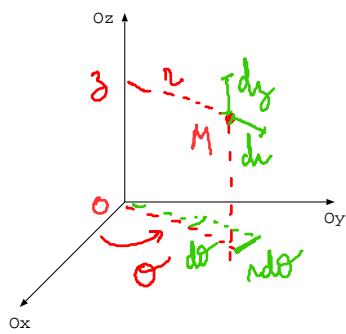
$$Q = \iiint_{\text{volume}} dq(M) = \iiint_{\text{volume}} \rho(M) dV(M)$$

Au sujet des volumes élémentaires:

En coordonnées cartésiennes, le volume élémentaire s'écrit:

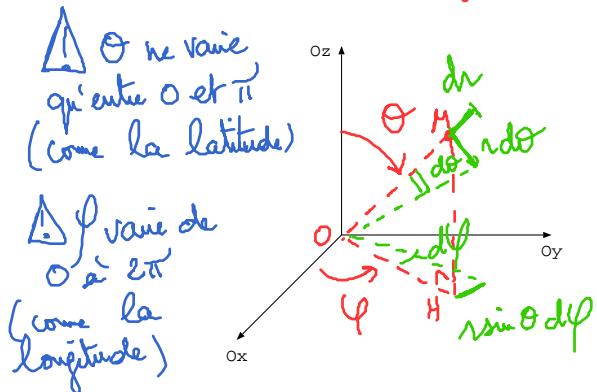
$\frac{dq}{R} \leftrightarrow$  la longueur de l'arc de cercle (c'est également un segment) est  $R d\theta$

Coordonnées cylindriques



$$dV = dr \times dy \times rd\phi$$

Coordonnées sphériques



$$dV = dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\phi$$

Au sujet des volumes:

$$\text{Volume d'une sphère de rayon } R: \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{Volume d'un cylindre de rayon } R \text{ et de hauteur } h: \pi R^2 \times h$$

dans ce cas :

$$\rho = \frac{Q}{V} \text{ ou } Q = \rho \times V$$

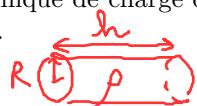
Cas particuliers très fréquents : la charge est uniformément répartie dans un volume, ce qui signifie que  $\rho$  est une constante. Exemples de calculs demandés en exercice:

Exprimer la densité volumique de charge pour une sphère de rayon  $R$  et de charge  $+Q$  uniformément répartie dans son volume.



$$Q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ ou } \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Exprimer la densité volumique de charge d'un cylindre de  $R$ , de hauteur  $h$  et de charge  $+Q$  uniformément répartie dans son volume.



$$Q = \rho \times \pi R^2 h \text{ ou } \rho = \frac{Q}{\pi R^2 h}$$

Soit une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$  et de charge  $+Q$  uniformément répartie dans son volume. Exprimer la charge contenue dans la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R_1 < R$ .



$$\rho = \frac{+Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

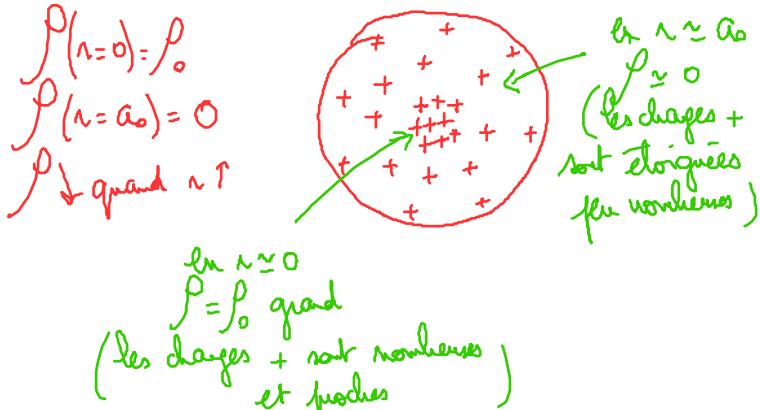
$$\text{et } Q_1 = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

autre façon de l'écrire:

$$Q \leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$Q_1 \leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R_1^3 \Rightarrow Q_1 = Q \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Exercice : soit une sphère de rayon  $a_0$  de densité volumique de charges  $\rho(r) = \rho_0(1 - \frac{r}{a_0})$  en coordonnées sphériques. Calculer la charge totale contenue dans cette sphère.



$$\begin{aligned}
 Q &= \iiint f(m) dm \quad \text{en coord. sphériques} \\
 &= \iint \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a_0}\right) r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi \\
 &= \rho_0 \int_0^{a_0} \left(r^2 - \frac{r^3}{a_0}\right) dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= \rho_0 \left[ \frac{a_0^3}{3} - \frac{a_0^4}{4a_0} \right] \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \rho_0 a_0^3 \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

## II. Théorème de Gauss

On admet que le champ électrique vérifie les équations locales:

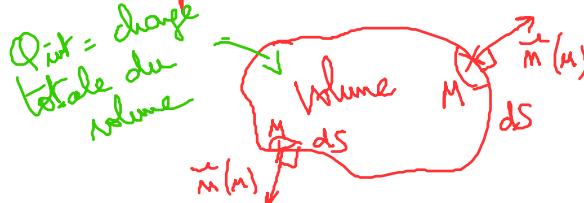
$$(1) \operatorname{div} \vec{E}(m) = \frac{\rho(m)}{\epsilon_0} \quad (\text{on a un p'tit charge + c'est un champ divergent et une charge - c'est un champ convergent})$$

$$(2) \operatorname{rot} \vec{E}(m) = \vec{0} \quad (\text{le champ électrique ne "tourne" pas}) \Rightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad} V$$

(1) Conduit au théorème de Gauss.

Énoncé du théorème : le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge intérieure contenue dans le volume délimité par la surface divisée par  $\epsilon_0$ .

Mathématiquement le théorème s'écrit :



$$\iint_S \vec{E}(m) dS(m) \vec{n}(m) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

le bord désigne une surface fermée = surface qui délimite un volume

vecteur unitaire normal à la surface en  $M$  et dirigé vers l'extérieur car on calcule le flux sortant

Méthode d'application: le théorème de Gauss sert à trouver le champ électrique créé par une distribution de charges à forte symétrie (sphère, cylindre infini et parallélépipède infini). Il s'applique en trois étapes:

Etape 1 : On choisit, pour repérer  $M$ , un système de coordonnées sphériques, cylindriques ou cartésiennes, adapté aux symétries de la distribution

On prévoit la direction du champ électrique grâce aux plans de symétrie présents.

On prévoit les variables du champ électrique grâce aux invariances présentes.

Etape 2 : On choisit une surface de Gauss qui passe par  $M$  et qui respecte les symétries (concrètement cette surface doit être perpendiculaire à  $\vec{E}$  ou tangente à  $\vec{E}$  en tout point).

On calcule le flux sortant du champ électrique à travers la surface de Gauss.

Etape 3 : On calcule la charge intérieure contenue dans la surface de Gauss, on est souvent amené à considérer deux cas suivant que  $M$  est à l'extérieur ou à l'intérieur du volume qui contient les charges. On fait un dessin pour visualiser les charges présentes et les charges intérieures à la surface de Gauss.

On applique le théorème. On déduit le potentiel de l'équation locale  $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$ . On trouve les constantes d'intégration en écrivant que le potentiel est continu et que loin des charges le potentiel est nul.

La suite du chapitre est consacrée à la détermination du champ électrique et du potentiel électrique par application du théorème de Gauss pour les distributions de charges suivantes:

- Une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$ , de charge  $Q$ , chargée uniformément en volume
- Une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$ , de charge  $Q$ , chargée uniformément en surface
- Un cylindre de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$  et de longueur  $l >> R$  (ce cylindre est considéré de longueur infini), de charge  $Q$  uniformément chargé en volume
- Un parallélépipède de section  $S$  compris entre les plans  $z = -e/2$  et  $z = e/2$  chargé uniformément en volume

### III) Champ et potentiel créés par une sphère uniformément chargée en volume.

Situation :

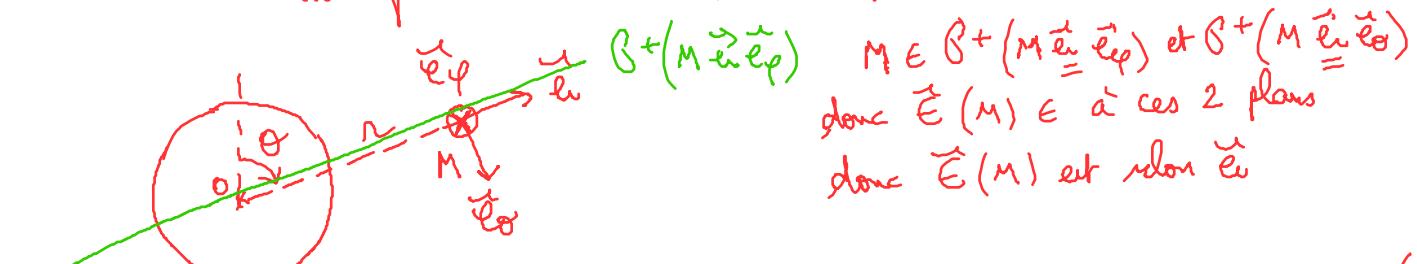


$$\rho(r < R) = \rho_0 \quad \text{il y a des charges dans la sphère}$$

$$\rho(r > R) = 0 \quad \text{il n'y a pas de charges à l'extérieur de la sphère}$$

$$\rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Etape 1 du théorème : on repère le point  $M$  par ses coordonnées sphériques  $M(\rho, \theta, \varphi)$  avec pour vecteur de base  $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$



On dit qu'il y a invariance par rotation autour de  $O$  (quand on tourne la sphère de charges autour de  $O$ , le point  $M$  "vit" toujours la même chose) donc:

$\|\vec{E}(M)\| = \|\vec{E}(\rho, \theta, \varphi)\|$

quand on tourne autour de  $O$  la charge  $Q$  et  $\varphi$  donc  $\theta$  et  $\varphi$ .

invariance par rotation autour de  $O$  n'intervient pas

d'où  $\boxed{\vec{E}(M) = E(r) \hat{e}_r}$

Rq: a priori le champ électrique s'écrirait:

$$\vec{E} = E_r(\rho, \theta, \varphi) \hat{e}_r + E_\theta(\rho, \theta, \varphi) \hat{e}_\theta + E_\varphi(\rho, \theta, \varphi) \hat{e}_\varphi$$

grâce aux invariances on voit que les variables  $\theta$  et  $\varphi$  n'interviennent pas grâce aux hypothèses  $E_\theta$  et  $E_\varphi$  sont nulles