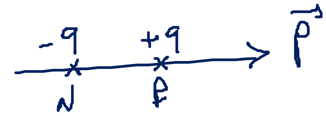
Chapitre EM 5 : dipôle électrique

I. Le dipôle électrique

1. Définition : un dipôle est un système électriquement neutre dans lequel le barycentre des charges positives ne coincide pas avec le barycentre des charges négatives.

Notations: P est le barycentre des charges positives, sa charge est $+q$ et N est le barycentre des charges négatives, sa charge est $-q$.

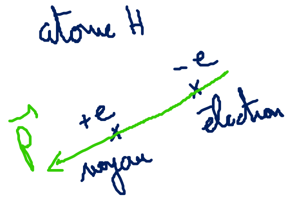
Un dipôle électrique est caractérisé par son moment dipolaire : $\boxed{\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP}}$ (vecteur dirigé de N vers P)

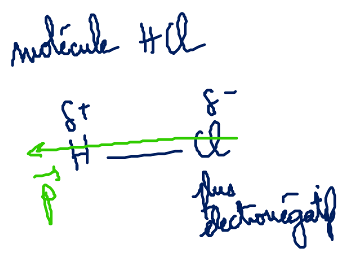


Unité de p: $[p] = C.m$

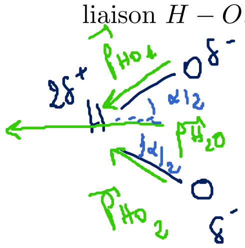
Unité utilisée couramment: le Debye: $1\ D = 3,3.10^{-30}\ C.m$

Exemples:





Les deux liaisons $H - O$ de la molécule d'eau font entre elles un angle $\alpha = 104,45^0$. Sachant que le moment dipolaire expérimental de l'eau est égal à $1,8546\ D$ calculer le moment dipolaire que l'on peut associer à la liaison $H - O$.



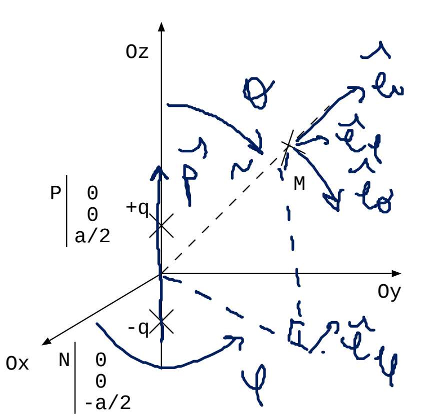
$$\vec{p}_{H_2O} = \vec{p}_{HO_1} + \vec{p}_{HO_2}$$

$$\|\vec{p}_{H_2O}\| = 2\,\|\vec{p}_{HO}\| \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{soit } \|\vec{p}_{HO}\| = \frac{\|\vec{p}_{H_2O}\|}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

2. L'approximation dipolaire : elle consiste à étudier le potentiel et le champ électriques créés par un dipôle placé en O, en un point M loin du dipôle. Cela signifie que la distance OM entre le dipôle et le point M est très grande devant la taille $a = PN$ du dipôle. On exprime alors le potentiel et le champ électriques en M en faisant un DL à l'ordre le plus bas non nul en a/r (a/r étant un infiniment petit d'ordre 1).

3. Expression du potentiel électrique dans l'approximation dipolaire



Expression du moment dipolaire:

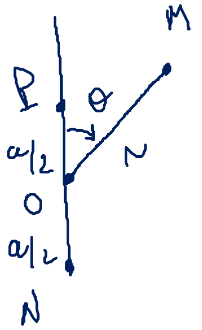
$$\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP} = q\,a\,\vec{e}_z$$

Expression du potentiel en :

$$V(M) = V_P(M) + V_N(M)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right)$$

Donnée : $(1+\epsilon)^n \approx 1+n\epsilon$ pour ϵ petit.



$$\|\vec{PM}\|^2 = \left(\vec{PO}+\vec{OM}\right)^2 = PO^2 + OM^2 + 2\vec{PO}.\vec{OM}$$
$$= \frac{a^2}{4} + r^2 + 2\|\vec{PO}\|.\|\vec{OM}\|\cos(\pi-\theta)$$
$$= \frac{a^2}{4} + r^2 - 2\frac{a}{2}r\cos\theta$$
$$= r^2\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)$$

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$ D.L. à l'ordre 1 en $\frac{a}{r}$

$$\frac{1}{NM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

$$\boxed{V(M)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta - \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)\right) = \boxed{\frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}}$$

Remarque:

- Le potentiel ne dépend pas de ϕ:

il y a invariance par rotation autour de (Oz)

- Pour $\theta = \pi/2$: le plan (Oxy) (correspond à $\theta = \pi/2$) est σ− c'est une équipotentielle 0V

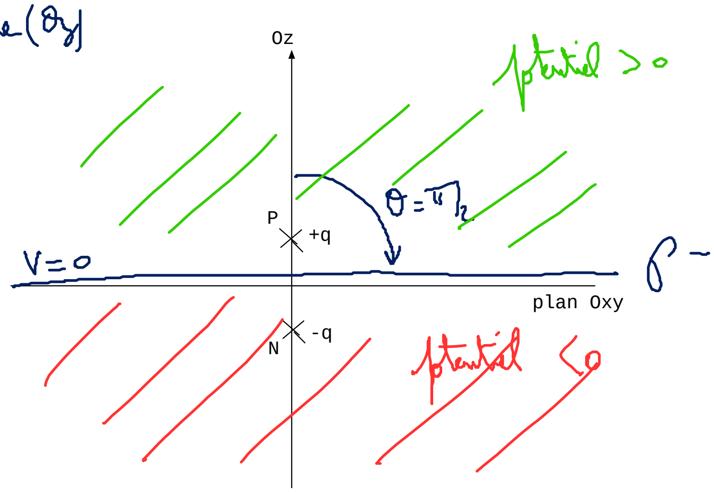
$V(\theta = \pi/2) = 0$

Pour $0 < \theta < \pi/2$:

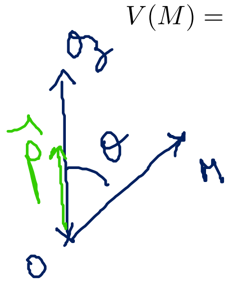
$\cos\theta > 0$ $V(M) > 0$ M + près de la charge +

Pour $\pi/2 < \theta < \pi$:

$\cos\theta < 0$ $V(M) < 0$ M + près de la charge −



- L'énoncé peut donner le potentiel sous la forme intrinsèque (indépendante du système de coordonnées): $V(M) = \dfrac{\vec{p}.\vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 OM^3}$. Cette expression s'écrit en coordonnées sphériques:



$$\vec{p}.\vec{OM} = \|\vec{p}\| \times \|\vec{OM}\| \cos\theta = p\,r\cos\theta$$

$$V(M) = \frac{p\,r\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$$

- Le potentiel créé par une charge ponctuelle varie en $1/r$

Le potentiel créé par un dipôle varie en ...$1/r^2$: le champ créé par un dipôle ↓ plus vite que celui créé par une charge ponctuelle lorsqu'on s'en éloigne.

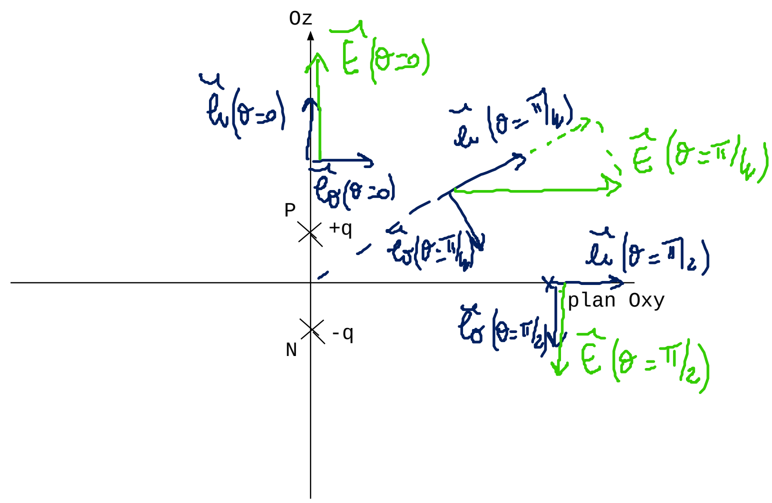
4. Expression du champ électrique dans l'approximation dipolaire

Données: en coordonnées sphériques: $\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\overrightarrow{e_\phi}$.

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = +\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = 0 \end{vmatrix}$$

Expression du champ électrique pour $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$ et $\theta = \pi/2$:

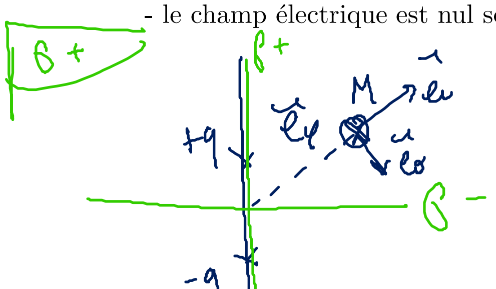
$\vec{E}(\theta=0) = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e_r}(\theta=0)$ $\quad$ $\vec{E}(\theta=\frac{\pi}{2}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e_\theta}(\theta=\pi/2)$ $\quad$ $\vec{E}(\theta=\pi/4) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3\sqrt{2}}\left[2\vec{e_r}(\theta=\pi/4) + \vec{e_\theta}(\theta=\pi/4)\right]$



Remarques:

- le champ électrique ne dépend pas de ϕ: il y a invariance par rotation autour de (Oz)

- le champ électrique est nul selon $\overrightarrow{e_\phi}$:



$M \in \Pi^+ (M\vec{e_r}\vec{e_\theta})$
donc $\vec{E}(M) \in$ à ce plan
donc $\vec{E}(M)$ est selon $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$

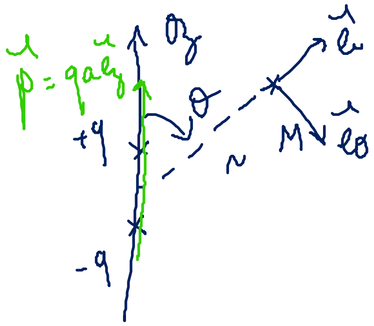
- Le champ électrique créé par une charge ponctuelle varie en $1/r^2$

Le champ électrique créé par un dipole électrique varie en ... $1/r^3$

Conséquence:

le champ électrique créé par un dipôle diminue plus vite que celui créé par une charge lorsqu'on s'en éloigne

- L'énoncé peut donner l'expression intrinsèque du champ électrique: $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{3(\overrightarrow{p}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{p}OM^2}{4\pi\varepsilon_0 \, OM^5}$.
On en déduit le champ électrique en coordonnées sphériques:



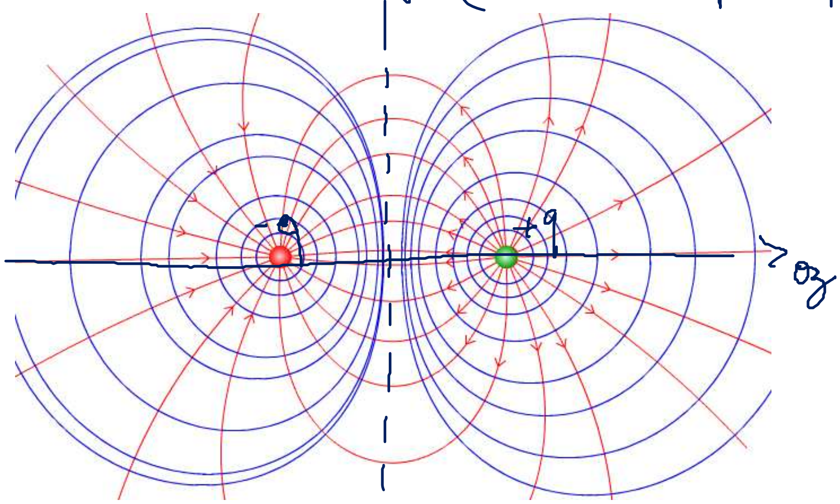
$$\vec{p}.\vec{OM} = \|\vec{p}\| \times \|\vec{OM}\| \cos\theta = p\, r \cos\theta$$
$$\vec{OM} = r\vec{e_r}$$
$$\vec{p} = p\,\vec{e_z} = p\left[\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right]$$
$$\vec{E} = \frac{3\,p\,r\cos\theta\; r\vec{e_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} - \frac{p\,r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left[\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right] = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\,\vec{e_r} + \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right]$$

5. Lignes de champ et équipotentielles

Lignes de champ et équipotentielles d'une distribution de deux charges $+q$ et $-q$

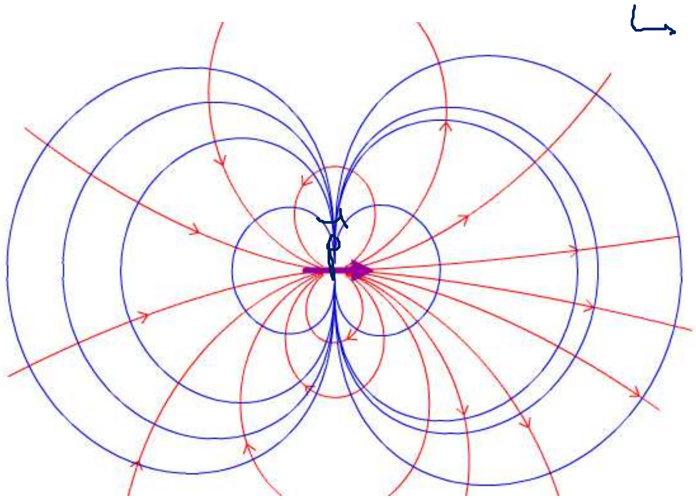
P^- ($\vec{E} \perp P^-$ en tout point du plan)

P^+ ($\vec{E} \in P^+$ en tout point du plan)



Lignes de champ et équipotentielles dans l'approximation dipolaire

↳ on se place loin du dipôle : $r \gg a$



les lignes de champ se referment sur elles-même ce n'est pas cohérent, cette anomalie vient du fait que les lignes de champ ne sont juste que loin du dipôle : près du dipôle la carte de champ est fausse

6. Action d'un champ électrique sur un dipôle

Expressions données dans un énoncé:

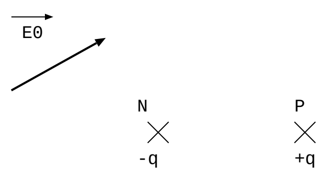
Soit un dipôle rigide de moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ placé en A et soumis à l'action d'un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E}$.

Ce dipôle subit:

- la résultante des forces: $\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{p}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{E}(A)$
- le couple résultant $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p}\wedge\overrightarrow{E}(A)$

Son énergie potentielle est $E_p = -\overrightarrow{p}.\overrightarrow{E}(A)$

Cas d'un champ extérieur uniforme:



Force résultante: $\vec F = q\vec E_0 - q\vec E_0 = \vec 0$

le dipôle ne translate pas

Couple résultant: $\vec \Gamma = \vec{OP}\wedge q\vec E_0 + \vec{ON}\wedge(-q\vec E_0)$

$= q\vec{NP}\wedge\vec E_0 = \vec p\wedge\vec E_0$

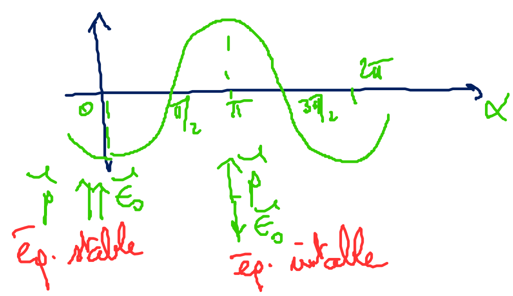
le dipôle tourne jusqu'à ce que $\vec p$ et $\vec E_0$ soient colinéaires

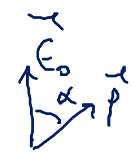
Energie potentielle d'un dipôle:

Rq: pour une charge ponctuelle q placée dans un champ $\vec E$: $\vec F = -\vec{\text{grad}}\,E_p = q\vec E = -q\,\vec{\text{grad}}\,V$

soit $\boxed{E_p(M) = qV(M)}$

$$E_p = qV(P) - qV(N) = q\left[V(P) - V(N)\right] = q\int_P^N \vec E_0 . d\vec{OM} = -q\overrightarrow{NP}.\vec E_0 = -\vec p.\vec E_0$$





$E_p = -pE_0\cos\alpha$

Conséquence:

Dans un champ $\vec E$ uniforme, le dipôle ne translate pas, il tourne jusqu'à s'aligner dans la direction et le sens de $\vec E$ (ép. stable).

Cas d'un champ extérieur non uniforme:

On considère la molécule de méthanal CH_2O de moment dipolaire $\overrightarrow{p} = p\overrightarrow{e_z}$ avec $p > 0$. Ce dipôle est placé en M sur l'axe Oz à la côte z. En O se trouve un cation portant une charge $+Q$. Exprimer et étudier la force subie par le dipôle pour $z > 0$ et pour $z < 0$.