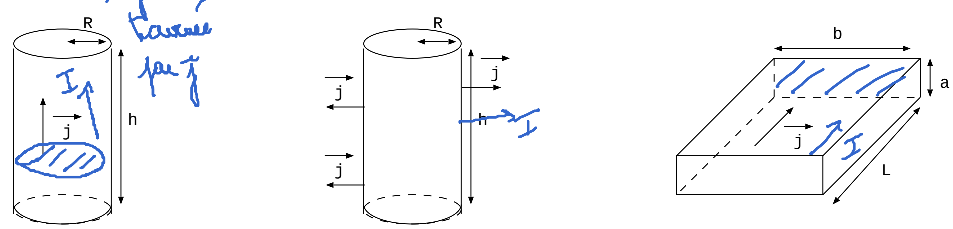
Chapitre EM 6 : Magnétostatique

Les champs magnétiques permanents sont créés par des courants. Les courants s'expriment soit par leur intensité I (d'unité A...) soit par le vecteur densité de courant $\vec{j}$ (d'unité ...A.m^{-2}...................................).

Relation entre ces deux grandeurs:

$I = j \times \underbrace{\pi R^2}_{\text{surface traversée par } \vec{j}}$ $\qquad$ $I = j \times 2\pi R h$ $\qquad$ $I = j \times ab$



Ordres de grandeur de champ magnétique:

Composante horizontale du champ magnétique terrestre : $2.10^{-5}\ T$

Champ créé par un solénoide en cours parcouru par un courant de l'ordre de l'Ampère: qqs mT

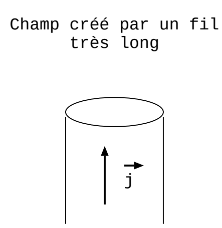
Appareil d'investigation de type IRM : $0,5$ à $3\ T$

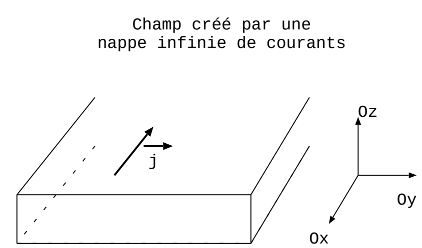
I. Propriétés de symétrie et d'invariance

1. *Les invariances* : Les invariances permettent de simplifier les variables

$\|\vec{B}\| = B(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$

invariance par rotation autour de (Oz) et par translation selon (Oz)





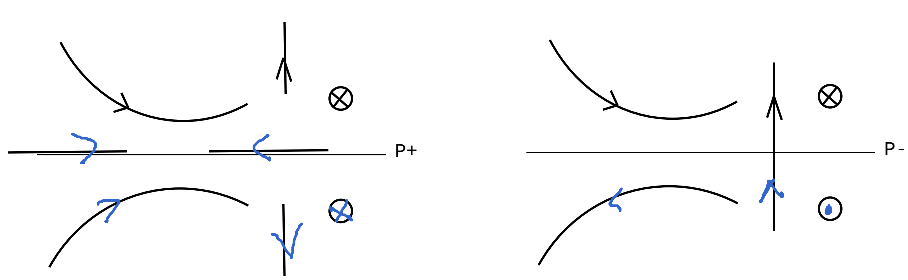
$\|\vec{B}\| = B(\cancel{x}, \cancel{y}, z)$

invariance par translation selon (Ox) et (Oy)

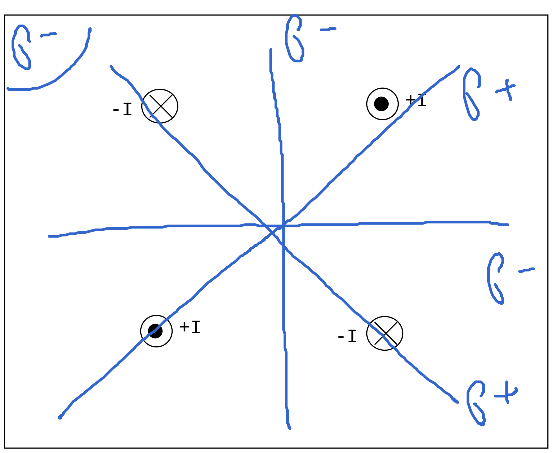
2. *Plans de symétrie et d'antisymétrie pour les courants*

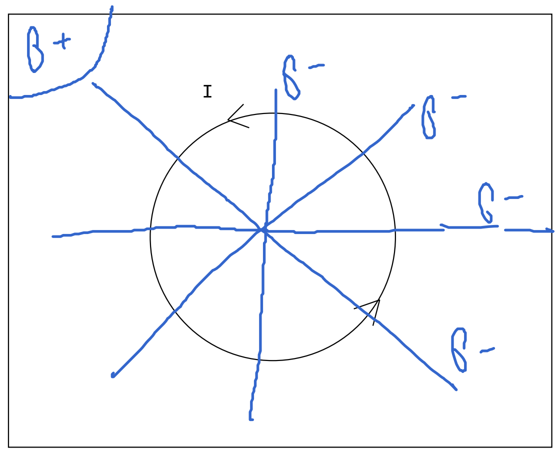
Un plan de symétrie ou plan de symétrie positive, noté P^+, pour les courants, est tel qu'en tout couple de points symétriques par rapport au plan, les courants sont symétriques. Un tel plan peut contenir des courants et ne peut pas être traversé par des fils.

Un plan d'antisymétrie ou plan de symétrie négative noté, P^-, pour les courants, est tel qu'en tout couple de points symétriques par rapport au plan, les courants sont antisymétriques (c'est l'opposé du symétrique). Un tel plan ne peut pas contenir de courant mais il peut être traversé par des courants.



Exemples : sur les distributions de courant suivantes, identifier les plans de symétrie.





3. *Conséquences sur le champ magnétique*: Les symétries permettent de trouver la direction de $\vec{B}(M)$

B

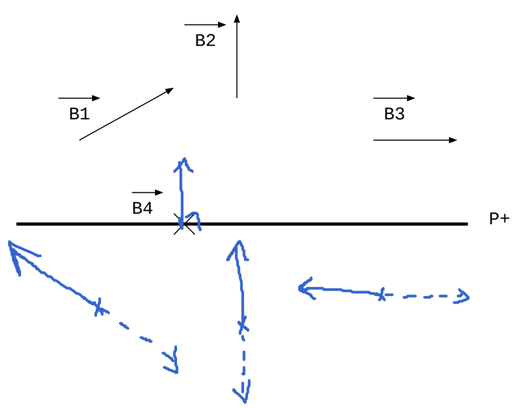
En un point d'un plan de symétrie pour les courants, le champ magnétique est $\perp$ à ce plan

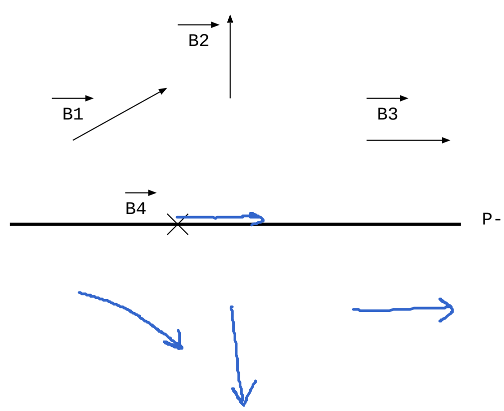
En un point d'un plan d'antisymétrie pour les courants, le champ magnétique est contenu dans ce plan

En deux points symétriques par rapport à un plan P^+, les champs magnétiques sont antisymétriques / à ce plan

En deux points symétriques par rapport à un plan P^-, les champs magnétiques sont symétriques / à ce plan

Remarque : les propriétés de symétrie sont croisées pour les champs électriques et magnétiques.



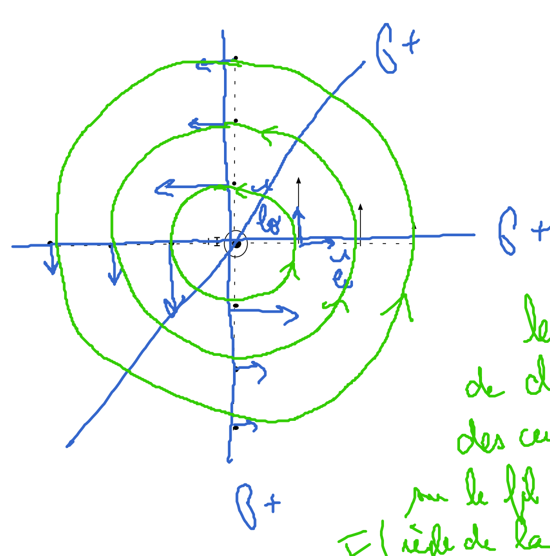


Exemple 1 : On donne le magnétique créé par un fil infini en trois points différents. Utiliser les propriétés de symétrie pour tracer le champ magnétique aux neuf autres points indiqués sur le schéma. En déduire le tracé des lignes de champ.

Parmi les expressions du champ magnétique suivantes, quelle est celle qui vous parait en accord avec ce que l'on observe?

$\overrightarrow{B_a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e_r}$ ou $\overrightarrow{B_b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$ ou $\overrightarrow{B_c} = \frac{\mu_0 I r}{4\pi}\overrightarrow{e_\theta}$

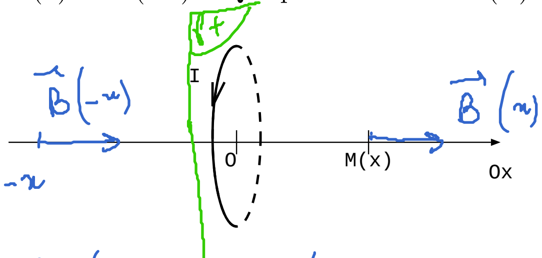
$\vec{B}$ selon $\vec{e_\theta}$ et $\|\vec{B}\| \downarrow$ quand $r \uparrow$

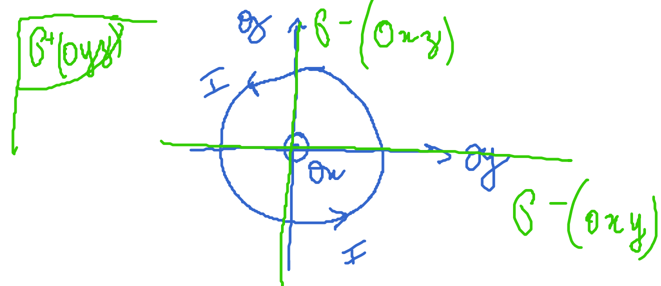


les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil et orientés par I (règle de la main droite)

Conclusion : les lignes de champ magnétique créées par un fil infini sont des cercles centrés sur le fil et orientés par la règle de la main droite à partir de I

Exemple 2 : Soit une spire de centre O, de rayon R parcouru par un courant d'intensité I. Soit un point M sur l'axe de la spire, repéré par son abscisse x. Quelle est la direction de $\overrightarrow{B}(x)$? Quelle est la relation entre $\overrightarrow{B}(x)$ et $\overrightarrow{B}(-x)$? Que pensez-vous de $\overrightarrow{B}(O)$?



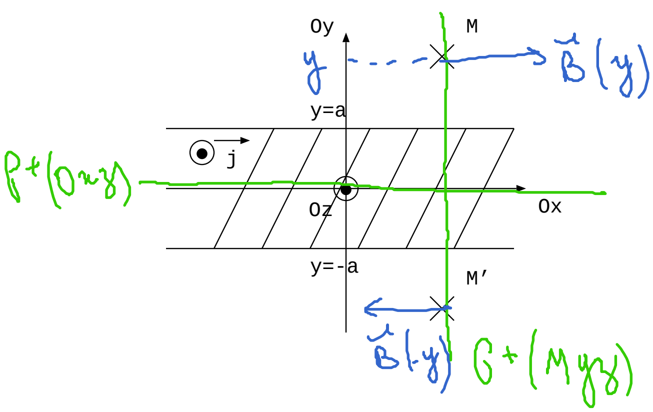


$M \in \Pi^-(Oxy)$ et $\Pi^-(Oxz)$
donc $\vec{B}(M) \in$ à ces 2 plans
donc $\vec{B}(M)$ selon (Ox)

$M(x)$ et $M'(-x)$ sont symétriques / au plan $\Pi^+(Oyz)$ donc $\vec{B}(x)$ et $\vec{B}(-x)$ sont antisymétriques / à ce plan
soit $\vec{B}(-x) = +\vec{B}(x)$

$\vec{B}(x=0)$ n'est pas nul, c'est en $x=0$, au centre de la spire que le champ est maximal

Exemple 3 : Soit des courants répartis uniformément dans un parallépipède compris entre les plans $y = -a$ et $y = +a$, on néglige les effets de bord. Déterminer la direction et les variables du champ magnétique en M. Comparer les champs magnétiques en M et M'.



$M \in \Pi^+(Myz)$
donc $\vec{B}(M) \perp$ à ce plan
donc $\vec{B}(M)$ selon (Ox)

$\boxed{\vec{B} = B(y)\,\vec{e}_x}$

$\|\vec{B}(M)\| = \|\vec{B}(\cancel{x}, y, \cancel{z})\|$
invariance par translation selon (Ox) et (Oz)

M et M' sont symétriques / à $\Pi^+(Oxz)$ donc $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$ sont antisymétriques / à ce plan, d'après le schéma : $\vec{B}(-y) = -\vec{B}(y)$

II. Divergence du champ magnétique

Equation locale: équation de Maxwell Thomson : $\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$

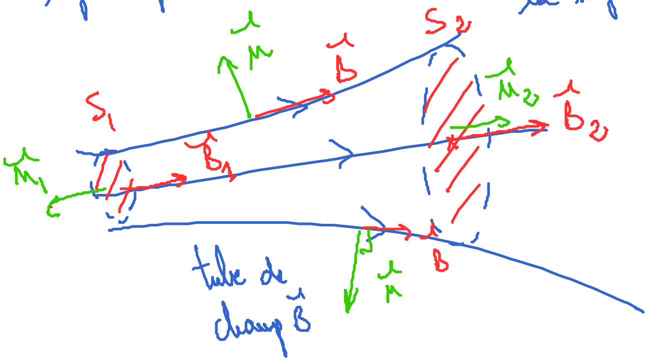
Equation intégrale: on applique le th. d'Ostrogradsky :

$$\oiint \vec{B}(M)\, dS(M)\, \vec{n}(M) = \iiint \operatorname{div} \vec{B}(P)\, d\tau(P) = 0$$

M sur la surface fermée

P dans le volume délimité par la surface fermée

$\boxed{\text{on dit que } \vec{B} \text{ est à flux conservatif}}$



le flux à travers le tube de champ $\vec{B}$ est nul

soit : $0 - B_1 S_1 + B_2 S_2 = 0 \qquad B_1 S_1 = B_2 S_2$

donc avec $S_2 > S_1$ on a $B_2 < B_1$

le champ $\vec{B}$ diminue quand les lignes de champ s'écartent

III. Rotationnel du champ magnétique et conséquence

1. Enoncé et démonstration du théorème d'Ampère

Equation locale: équation de Maxwell Ampère (en régime stationnaire) : $\boxed{\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$

μ_0 : perméabilité du vide

le champ magnétique tourne autour des courants

il n'existe pas de potentiel magnétique

les lignes de champ peuvent se fermer sur elle-même

Equation intégrale: th. de Stokes :

$$\oint \vec{B}(M)\, d\vec{OM} = \iint \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B}(P)\, dS(P)\, \vec{n}(P) = \iint \mu_0 \vec{j}(P)\, dS(P)\, \vec{n}(P) = \mu_0 I_{enlacés}$$

M ∈ au contour fermé et orienté

P ∈ surface délimitée par le contour

$\vec{n}$ se déduit de la main droite du sens d'orientation du contour

$I_{enlacés} = \iint \vec{j}(P)\, dS(P)\, \vec{n}(P)$ courants qui traversent le contour d'Ampère

Enoncé du théorème d'Ampère: la circulation du champ magnétique sur un contour fermé et orienté est égale à μ_0 fois les courants enlacés par le contour.

$$\mathcal{C} = \oint \vec{B}(M)\, d\vec{OM} = \mu_0 I_{enlacés}$$

avec $I_{enlacés} = \sum_k \pm I_k$

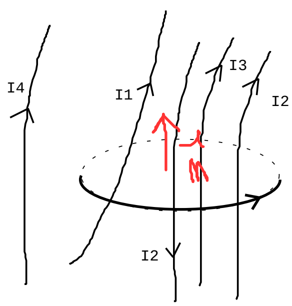
+ lorsque le courant est dans le même sens que le contour (main droite)

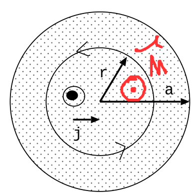
− lorsque le courant est dans le sens opposé à celui du contour

ou

$$I_{enlacés} = \iint_{P \in contour} \vec{j}(P)\, dS(P)\, \vec{n}(P)$$

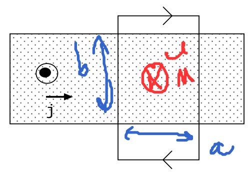
Exemples de calculs de courants enlacés:



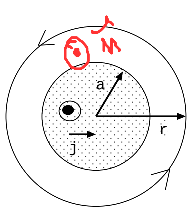


$I_{enlacés} = j \times \pi r^2$

$I_{enlacés} = +I_1 + I_3 + I_2 - I_2$



$I_{enlacés} = -j \times ab$



$I_{enlacés} = + j\pi a^2$

2. Méthode d'application du théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère sert à exprimer le champ magnétique créé par une distribution de courants à forte symétrie (symétrie cylindrique ou plane). Il s'applique en plusieurs étapes.

Etape 1 : choix du système des coordonnées pour repérer le point M (en accord avec le symétries de la distribution de courants).

Etude des plans de symétrie qui passent par M pour trouver la direction du champ magnétique en M. **On en déduit la forme des lignes de champ magnétique.**

Etude des invariances pour déterminer les variables dont dépend le champ magnétique.

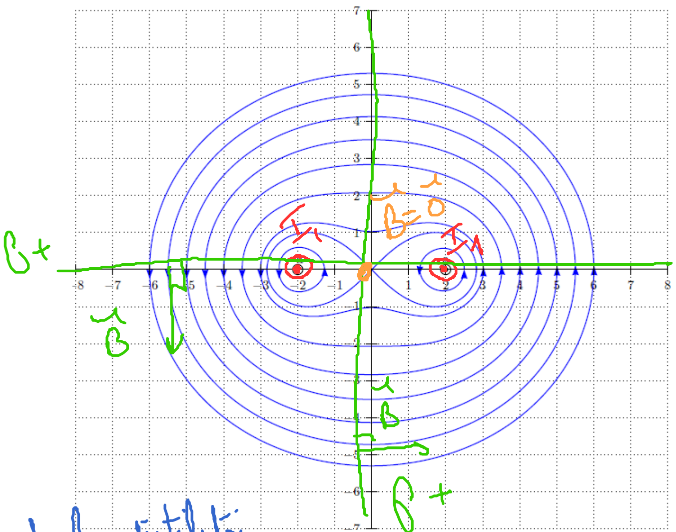
Etape 2 : on choisit un contour d'Ampère fermé et orienté qui passe par le point M (lorsque les lignes de champ se ferment sur elles même, le contour d'Ampère est une ligne de champ, lorsque les lignes de champ sont des droites le contour d'Ampère est un rectangle dont deux côtés parallèles sont des lignes de champ). On calcule la circulation du champ magnétique sur le contour choisi.

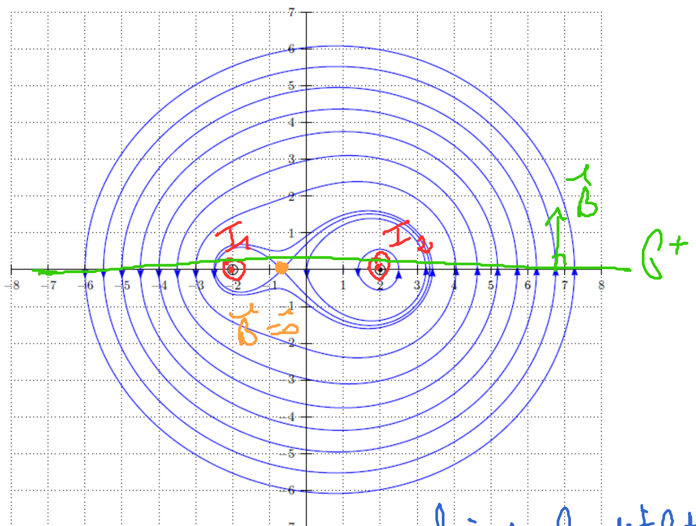
Etape 3 : on applique le théorème d'Ampère : on est dans ce cas amené à distinguer plusieurs cas (le contour d'ampère est à l'intérieur ou à l'extérieur de la distribution des courants). On calcule les courants enlacés par $\pm I$ si les intensités des courants sont données dans l'énoncé ou par $\iint \vec{j}.dS\vec{n}$ si les courants sont donnés par leur densité de courant.

Il faut savoir calculer le champ magnétique créé par un solénoide infini et par un fil infini et il faut connaître leurs expressions.

IV. **Conséquences des équations de Maxwell sur la topographie du champ magnétique**

$I_2 > I_1$ car $\vec{B} = \vec{0}$ plus près du fil de courant I_1





loin de la distribution, les lignes de champ sont des cercles, le système est équivalent à 1 seul fil centré en O

loin de la distribution, les lignes de champ sont des cercles, le système est équivalent à 1 seul fil