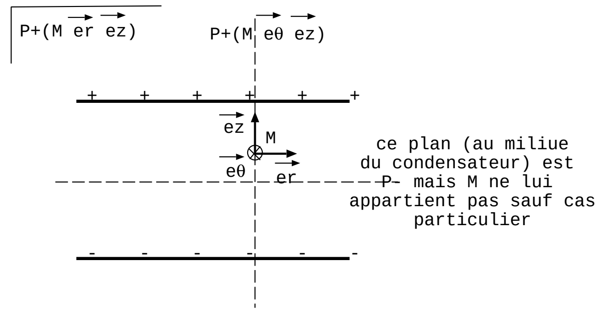
DM 7 de physique

I. **Correction: capteur pour la mesure de l'humidité**

1. Il y a invariance par rotation autour de Oz donc la variable θ n'intervient pas.

La variable r n'intervient pas car il y a invariance par translation dans un plan horizontal car les armatures sont infinies (on néglige les effets de bord).

M appartient au plan $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ et $P^+(M, \overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{e_\theta})$ donc le champ électrique en M est contenu dans ces plans et le champ est selon $\overrightarrow{e_z}$.



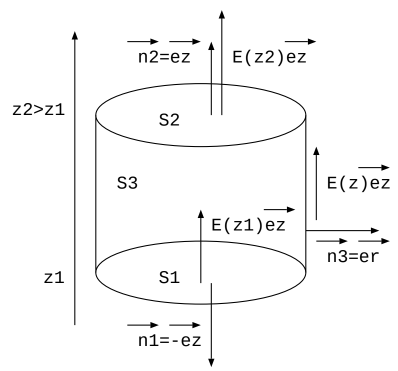
2. On calcule le flux du champ électrique à travers un cylindre de rayon a et compris entre les plans z_1 et $z_2 > z_1$.

Le flux du champ électrique à travers la surface latérale est nul car le champ est contenu dans la surface.

Sur la surface S_1 on a $\iint E(z_1)\overrightarrow{e_z}dS(-\overrightarrow{e_z}) = -E(z_1)\iint dS = -\pi a^2 E(z_1)$.

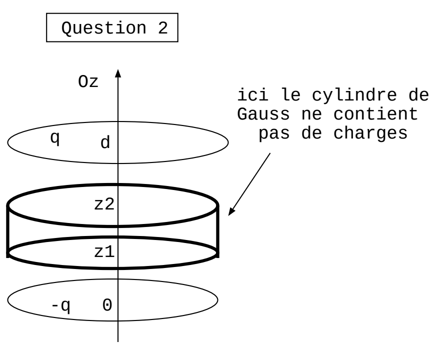
Sur la surface S_2 on a $\iint E(z_2)\overrightarrow{e_z}dS(\overrightarrow{e_z}) = E(z_2)\iint dS = \pi a^2 E(z_2)$.

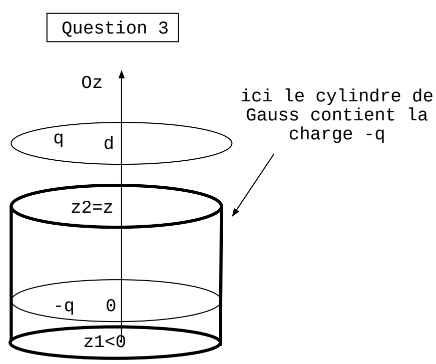
Le flux du champ électrique à travers le cylindre est donc $\phi = \pi a^2(E(z_2) - E(z_1))$.



3. Le théorème de Gauss nous dit que le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée est égale à la charge intérieure contenue dans le volume contenue dans cette surface divisée par ϵ_0.

J'applique le théorème de Gauss à un cylindre placé entre les armatures du condensateur. La charge intérieure est donc nulle donc $\phi = \pi a^2(E(z_2) - E(z_1)) = 0$ donc $E(z_1) = E(z_2)$ donc le champ électrique est uniforme entre les armatures du condensateur.





4. Le cylindre compris entre $z_1 < 0$ et $0 < z < d$ contient la charge $-q$. L'application du théorème de Gauss donne $\phi = \pi a^2(E(z) - E(z_1)) = \dfrac{-q}{\epsilon_0}$ avec $E(z_1 < 0) = 0$ car l'énoncé nous indique que le champ est nul à l'extérieur du condensateur.

On a donc $\pi a^2 E(z) = \dfrac{-q}{\epsilon_0}$ soit $E(z) = \dfrac{-q}{\pi a^2 \epsilon_0}$.

5. On en déduit le potentiel par la relation $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\dfrac{dV}{dz}\overrightarrow{e_z} = \dfrac{-q}{\pi a^2 \epsilon_0}\overrightarrow{e_z}$.

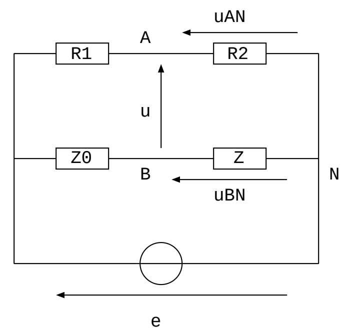
Soit $\dfrac{dV}{dz} = \dfrac{qz}{\pi a^2 \epsilon_0} + A$ où A est une constante d'intégration.

On en déduit la différence de potentiel $V(z=d)-V(z=0)=\frac{qd}{\pi a^2\epsilon_0}=\frac{q}{C}$ d'où la capacité de ce condensateur $C=\frac{\epsilon_0\pi a^2}{d}$.

6. On applique le diviseur de tension:

$\underline{u_{AN}}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\underline{e}$ et $\underline{u_{BN}}=\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}+\underline{Z}_0}\underline{e}$.

On en déduit $\underline{u}=-\underline{u_{BN}}+\underline{u_{AN}}=(-\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}+\underline{Z}_0}+\frac{R_2}{R_1+R_2})\underline{e}=\frac{R_2\underline{Z}_0-R_1\underline{Z}}{(R_1+R_2)(\underline{Z}_0+\underline{Z})}\underline{e}$.



7. Le pont de Sauty est équilibré pour $R_2\underline{Z}_0=R_1\underline{Z}$ avec $\underline{Z}=\frac{\underline{Z}_R\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R\underline{Z}_C}=\frac{R\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}}=\frac{R}{1+jRC\omega}$ (association $R//C$). De la même façon on a $\underline{Z}_0=\frac{R_0}{1+jR_0C_0\omega}$.

Ainsi l'équilibre du pont implique $\frac{R_2R_0}{1+jR_0C_0\omega}=\frac{RR_1}{1+jRC\omega}$ soit $R_2R_0(1+jRC\omega)=R_1R(1+jR_0C_0\omega)$.

Deux complexes sont égaux lorsque leurs parties réelles sont égales et lorsque leurs parties imaginaires sont égales, on a donc:

$R_2R_0=R_1R$ et $R_2R_0jRC\omega=R_1RjR_0C_0\omega$ soit $RC=R_0C_0$.

Soit $R=\frac{R_2R_0}{R_1}$ et $C=\frac{R_0C_0}{R}=\frac{R_1C_0}{R_2}$.

8. AN: $C=\frac{R_1}{R_2}C_0=144\,pF$: sur la courbe d'étalonnage on lit que pour $C=144\,pF$ on a 50 % d'humidité.