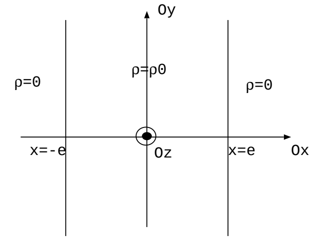
TD équations de Maxwell

I. **Equation de Maxwell-Gauss**



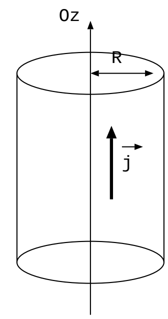
Des charges sont réparties uniformément entre les plans d'équation $x = -e$ et $x = +e$. Soit la densité volumique de charges s'écrit: $\rho(x < -e) = \rho(x > e) = 0$ et $\rho(-e < x < e) = \rho_0$. On néglige les effets de bord.

1. Simplifier l'expression du champ électrique à l'aide des symétries et des invariances. Que dire du champ électrique en O?

2. Déduire de l'équation de Maxwell-Gauss l'expression du champ électrique en tout point M. On admet que le champ électrique est continu.

Réponses: 1- $\overrightarrow{E}(O) = \overrightarrow{0}$ *2-* $x < -e$: $\overrightarrow{E} = -\dfrac{\rho_0 e}{\epsilon_0}\overrightarrow{e_x}$, $-e < x < e$: $\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0 x}{\epsilon_0}\overrightarrow{e_x}$ *et* $x > e$: $\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0 e}{\epsilon_0}\overrightarrow{e_x}$

II. **Equation de Maxwell-Ampère**



Soit un câble cylindrique de rayon R et d'axe Oz parcouru par un vecteur densité de courant $\overrightarrow{j} = \dfrac{j_0 r^2}{R^2}\overrightarrow{e_z}$.

1. Exprimer l'intensité I du courant qui traverse ce câble.

2. Simplifier l'expression du champ magnétique à l'aide des symétries et des invariances.

3. Déduire de l'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire, l'expression du champ magnétique en tout point. On donne : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{A} = (\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta})\overrightarrow{e_z}$

Réponses: 1- $I = \dfrac{j_0\pi R^2}{2}$ *3-* $r < R$: $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 j_0 r^3}{4R^2}\overrightarrow{e_\theta}$ *et* $r > R$: $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 j_0 R^2}{4r}\overrightarrow{e_\theta}$

III. **Courants de conduction et de déplacement**

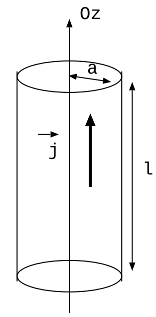
On étudie un milieu de conductivité γ pour lequel la densité volumique de courant de conduction vérifie la loi d'ohm locale. Ce milieu est le siège d'un champ électrique de la forme $\overrightarrow{\underline{E}} = \overrightarrow{E_0}e^{j(\omega t+\phi)}$ en notation complexe.

1. Qu'appelle-t-on courant de déplacement ? Exprimer, en ordre de grandeur, α défini comme le rapport des amplitudes du courant de conduction sur le courant de déplacement.

2. Calculer α pour des fréquences de 10 Hz à 10^{10} Hz pour le cuivre et le verre. En déduire une simplification de l'équation de Maxwell-Ampère. Données: $\gamma_{Cu} = 6.10^7$ SI, $\gamma_{verre} = 10^{-6}$ SI et $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9$ SI.

Réponse: $\alpha \approx \dfrac{\gamma}{\epsilon_0\omega}$

IV. **Flux du vecteur de Poynting**



On considère un câble électrique assimilé à un cylindre d'axe Oz, de longueur L, de rayon a, conducteur ohmique de conductivité γ, parcouru par des courants indépendants du temps de densité volumique uniforme $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{e_z}$. Sa perméabilité est celle du vide μ_0. On néglige les effets de bord.

1. Déduire des symétries, les directions des champs électrique et magnétique. Préciser la forme des lignes de champ électrique et magnétique. Etudier les invariances.

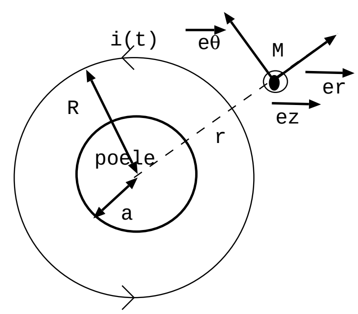
2. Exprimer l'intensité I du courant dans le câble et la résistance R_c du câble.

3. Déduire de la loi d'Ohm, l'expression du champ $\overrightarrow{E}$. Déduire du théorème d'Ampère le champ magnétique créé en tout point à l'extérieur du câble.

4. En déduire les expressions du vecteur de Poynting en un point M à la surface du câble et de la puissance électromagnétique rayonnée par le champ électromagnétique à travers le câble en fonction de la résistance R_c du câble et de I. Commenter.

Réponses : 3- $\overrightarrow{E} = \dfrac{I}{\pi a^2 \sigma}\overrightarrow{e_z}$ *4-* $\overrightarrow{R} = \dfrac{-I^2}{2\sigma\pi^2 a^3}\overrightarrow{e_r}$ *et* $P = -R_c I^2$

V. **Poêle à induction**



On se contente de comprendre le principe du chauffage par induction avec un circuit simple composé d'une unique spire circulaire de centre O et de rayon R, parcourue par une intensité $i(t) = I_0\cos(\omega t)$. On travaille dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. On pose, dans le plan de cette spire, une poêle assimilée à un cylindre de rayon $a < R$ et d'épaisseur e, de perméabilité magnétique relative μ_r et de conductivité électrique γ.

Dans un souci de simplification, on suppose que le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ créé par la spire dans la poêle est uniforme. On donne : $B(M,t) = \dfrac{\mu_0\mu_r i(t)}{2R}$.

1. Déterminer la direction de $\overrightarrow{B}(M,t)$ et de $\overrightarrow{E}(M,t)$ et préciser la forme des lignes de champ électrique et de champ magnétique.

2. Rappeler l'équation locale de Maxwell-Faraday, en déduire l'expression du champ électrique. On admet que $\overrightarrow{E}$ ne dépend que de r et de t.

On donne : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{A} = (\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta})\overrightarrow{e_z}$

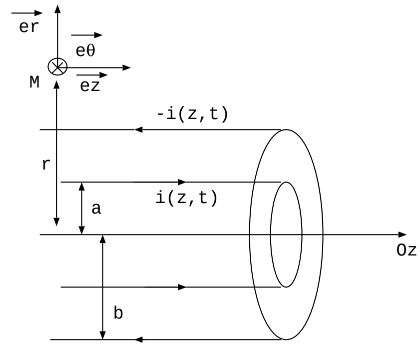
3. Ce champ électrique induit est responsable de courants de Foucault répartis dans tout le volume du conducteur. Exprimer la densité de courant volumique $\overrightarrow{j}(M,t)$ en tout point de la poêle et la puissance volumique moyenne p dissipée par effet Joule en fonction des données.

4. En intégrant cette puissance volumique moyenne sur le volume de la poêle, montrer que la puissance moyenne totale induite s'écrit : $P_{ind} = \dfrac{\mu_0^2\mu_r^2\gamma\omega^2 I_0^2 e a^4\pi}{64R^2}$.

5. On dispose de poêles en aluminium et en fonte. Bien que l'aluminium soit environ 40 fois plus conducteur électriquement que la fonte, on choisira la poêle en fonte : pourquoi ? On donne $\mu_r = 80$ pour la fonte et $\mu_r = 1$ pour l'aluminium.

Réponses: 2- $E(r,t) = \dfrac{\mu_0\mu_r I_0\omega r}{4R}\sin(\omega t)$ *3-* $p = \dfrac{\gamma\mu_0^2\mu_r^2 I_0^2\omega^2 r^2}{32R^2}$

VI. **Câble coaxial**



Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux infinis, de rayons respectifs a et b (avec $a < b$). L'espace entre les deux conducteurs est assimilé à du vide. On étudie le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ dans le câble en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) colinéaire à l'axe du câble. Le conducteur intérieur est parcouru par un courant électrique $i(z,t) = i_0 \cos(\omega t - kz)$ tandis que le conducteur extérieur est parcouru par $-i(z,t)$.

On suppose qu'en un point M de coordonnées (r, θ, z), le champ électromagnétique est de la forme : $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0(r)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{B}(M,t) = B_0(r)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_\theta}$.

1. Justifier le fait que les champs ne dépendent pas de θ et le fait que le champ magnétique est orthoradial. Préciser la forme des lignes de champ magnétique.

2. On se place dan l'hypothèse de régimes quasi-stationnaires, le théorème d'Ampère est donc valable. En déduire, l'expression de $B_0(r)$ pour $r < a$, $a < r < b$ et $r > b$.

3. Déduire de l'équation de Maxwell-Faraday, que l'on a $E_0(r) = \dfrac{\mu_0 i_0 c}{2\pi r}$ pour $r < a < b$. On donne en coordonnées cylindriques:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

4. Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting pour $r < a$, $a < r < b$ et $r > b$. En déduire la puissance moyenne se propageant dans le câble.

Réponses: 2- pour $a < r < b$: $B_0(r) = \dfrac{\mu_0 i_0}{2\pi r}$ 4- $<\overrightarrow{R}> = \dfrac{\mu_0 c i_0^2}{8\pi^2 r^2}\overrightarrow{e_z}$ pour $a < r < b$ et $<P> = \dfrac{\mu_0 c i_0^2}{4\pi}\ln(\dfrac{b}{a})$

VII. **Décharge d'une boule conductrice dans l'air**

On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon R, uniformément chargée en surface et abandonnée dans l'air avec une charge Q_0 se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est un milieu faiblement conducteur de conductivité γ (dans l'air la densité volumique de charges est nulle). L'origine de l'espace étant prise au centre O de la boule, on adopte les coordonnées sphériques de centre O.

1. Le théorème de Gauss est-il valable? Exprimer le champ électrique en M situé à l'extérieur de la boule conductrice à l'instant t où la charge de la boule est égale à $Q(t)$. En déduire $\overrightarrow{j}$, le vecteur densité de courant dans l'air.

2. Déduire des symétries que le champ magnétique est nul en tout point.

3. Déduire de l'équation de Maxwell-Ampère, l'équation différentielle vérifiée par $Q(t)$. La résoudre.

4. Calculer l'énergie électrique présente dans tout l'espace à l'extérieur de la boule à l'instant t. En déduire l'énergie perdue par la boule entre $t = 0$ et $t \to \infty$.

Réponses : 1- $\overrightarrow{j} = \dfrac{\gamma Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$ 3- $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$ 4- l'énergie perdue est $\dfrac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}$.

VIII. **Effet Meissner**

Un matériau supraconducteur est caractérisé par la relation locale $\overrightarrow{j} = -\dfrac{\overrightarrow{A}}{\mu_0 \delta^2}$ appelée équation de London où δ est une constante positive et $\overrightarrow{A}$ un vecteur défini par $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$.

L'étude est conduite en régime statique.

Le matériau supraconducteur occupe l'espace compris entre les plans $z = -a$ et $z = +a$ avec $\delta << a$. A l'extérieur du matériau règne un champ magnétique uniforme et constant $\overrightarrow{B} = B_0 \overrightarrow{e_x}$.

On admet que le champ magnétique est continu.

1. On donne $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\overrightarrow{B}) - \Delta\overrightarrow{B}$. Rappeler et utiliser les équations de Maxwell Thomson et de Maxwell Ampère pour montrer que dans le supraconducteur, le champ magnétique vérifie: $\Delta\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{B}}{\delta^2}$ $(*)$.

2. Déterminer les variables dont dépend le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ dans le supraconducteur. On admet que ce champ magnétique est selon Ox. Déduire de l'équation $(*)$ l'équation différentielle vérifiée par B et la résoudre.

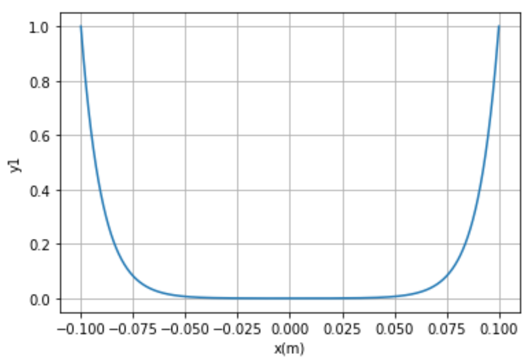
3. Déduire de l'équation de Maxwell-Ampère, l'expression de $\overrightarrow{j}$.

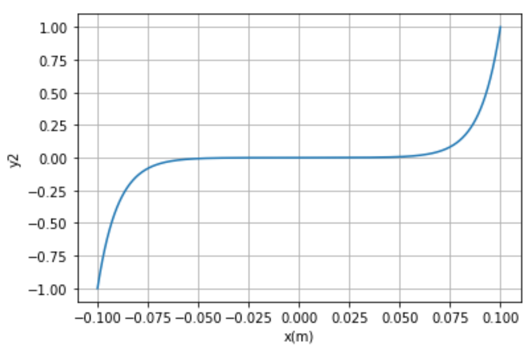
4. On donne le code python et le résultat de son exécution:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a=0.1
d=0.1*a
z=np.linspace(-a,a,1000)
y1=np.cosh(z/d)/np.cosh(a/d)
y2=np.sinh(z/d)/np.cosh(a/d)
plt.plot(z,y1)
plt.grid()
plt.xlabel('x(m)')
plt.ylabel('y1')
plt.show()

plt.plot(z,y2,label='y2')
plt.grid()
plt.xlabel('x(m)')
plt.ylabel('y2')
plt.show()
```





Utiliser ces courbes pour décrire le champ magnétique et les courants dans un supraconducteur.

Réponses: 2- $\overrightarrow{B} = B(z)\overrightarrow{e_x}$, $\dfrac{d^2B}{dz^2} - \dfrac{B}{\delta^2} = 0$ et $B(z) = B_0 \dfrac{\cosh(z/\delta)}{\cosh(a/\delta)}$.