Chapitre EM 9 : Ondes em dans le vide

Soit en un point de l'espace des charges et/ou des courants fonctions du temps. Ils créent en leur voisinage un champ électromagnétique variable. Ce champ électromagnétique variable est source d'un champ électromagnétique en son voisinage... et ainsi de proche en proche, le champ électromagnétique se propage. Il s'agit donc d'un phénomène ondulatoire.

I. **Equations de propagation des champs** $\overrightarrow{E}$ **et** $\overrightarrow{B}$

Equations de Maxwell en l'absence de charges et de courants :

Remarque: on étudie la propagation du champ em dans le vide, soit en dehors des charges et des courants sources qui ont donné naissance à cette onde.

Equation de propagation de $\overrightarrow{E}$: c'est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\overrightarrow{E}$, on l'obtient en utilisant $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(div\overrightarrow{E}) - \Delta\overrightarrow{E}$ et les équations de Maxwell.

Equation de propagation de $\overrightarrow{B}$: c'est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\overrightarrow{B}$, on l'obtient en utilisant $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(div\overrightarrow{B}) - \Delta\overrightarrow{B}$ et les équations de Maxwell.

Commentaires:

- En coordonnées cartésiennes, l'équation de propagation vectorielle donne trois équations de propagation scalaire. E_x, E_y, E_z, B_x, B_y et B_z vérifient la même équation, à savoir:

- En coordonnées sphériques avec pour variable spatiale unique r soit $E = E(r,t)$ et $B = B(r,t)$.

On donne le laplacien scalaire: $\Delta E = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rE)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial E}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 E}{\partial\phi^2}$

II. **Solutions en OPPH**

1. *Ecriture des solutions en notation réelle*

On propose une solution de la forme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM} + \phi)$

$\omega =$

$\overrightarrow{k} =$

Exemple pour $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{e_x}$, le champ électrique est de la forme:

Exemple pour $\overrightarrow{k} = -k\overrightarrow{e_y}$, le champ électrique est de la forme:

Exemple pour $\overrightarrow{k} = k\cos\alpha\overrightarrow{e_x} - k\sin\alpha\overrightarrow{e_z}$, le champ électrique est de la forme:

2. *Structure du champ électromagnétique*

Pour simplifier les calculs, on utilise la notation complexe: $\underline{\overrightarrow{E}} =$

Passage de la notation réelle à la notation complexe:

Passage de la notation complexe à la notation réelle:

L'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ s'écrit

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ s'écrit

L'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ s'écrit

L'opérateur Δ s'écrit

(on pense "c'est la dérivée par rapport à $\overrightarrow{OM}$")

(on pense "c'est la dérivée seconde par rapport à $\overrightarrow{OM}$")

Relation de dispersion : c'est la relation entre k et ω, on l'obtient en injectant la solution proposée pour $\overrightarrow{E}$ (ou $\overrightarrow{B}$) dans l'équation de propagation.

En notation réelle

En notation complexe

Vitesse de phase : elle est définie par $V_\phi = \dfrac{\omega}{k}$ où ω et k sont dans le même terme de phase.

Structure du champ em :

$div\underline{\overrightarrow{E}} =$

$div\underline{\overrightarrow{B}} =$

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\overrightarrow{E}} =$

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\overrightarrow{B}} =$

Conclusion :

3. *Remarque* : si on adopte la notation $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} \cos(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM} - \omega t + \phi)$.

En notation complexe, on a $\underline{\overrightarrow{E}} =$

L'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t}$ s'écrit

$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ s'écrit

L'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ s'écrit

L'opérateur Δ s'écrit

On trouve avec ces notations la même relation de dispersion et les mêmes résultats que précédemment.

4. *Exemple d'étude d'une OPPH.*

Dans les exemples suivants donner la direction de polarisation du champ électrique (c'est la direction de $\overrightarrow{E}$), la direction de propagation, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$, la densité volumique d'énergie électromagnétique et le vecteur de Poynting.

$\overrightarrow{E} = E_0 \overrightarrow{e_z} \cos(\omega t - ky)$

$\overrightarrow{B} = B_0 \overrightarrow{e_y} \cos(kx - \omega t)$

5. *Attention à la notation complexe*

On ne peut pas utiliser la notation complexe pour déterminer les valeurs instantanées de $\overrightarrow{R}$ et de u_{em}:

On peut cependant utiliser la notation complexe pour calculer des valeurs moyennes dans le temps. Dans ce cas, l'énoncé donne la façon de faire:

$$< \overrightarrow{R} >= \frac{1}{2} Re\left(\frac{\overrightarrow{\underline{E}} \Lambda \overrightarrow{\underline{B}^*}}{\mu_0}\right) \text{ et } < u_{em} >= \frac{\epsilon_0}{2} Re(\overrightarrow{\underline{E}}.\overrightarrow{\underline{E}^*}) + \frac{1}{2\mu_0} Re(\overrightarrow{\underline{B}}.\overrightarrow{\underline{B}^*}).$$

$\underline{E}^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{E}$, on le trouve en remplaçant j par $-j$ dans l'expression de $\underline{E}$.

Exemple: Soit une onde em de champ électrique $\overrightarrow{\underline{E}} = E_0 \overrightarrow{e_y} e^{j(\omega t + kx)}$. Donner la direction de polarisation du champ électrique (c'est la direction de $\overrightarrow{E}$), la direction de propagation, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{B}$, en déduire le champ em en notation réelle puis la densité volumique d'énergie électromagnétique et le vecteur de Poynting.

III. **Quand les ondes ne sont pas des OPPH**

Exemple 1: soit une onde dont le champ électrique est donné par : $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(\omega t) \sin(ky) \overrightarrow{e_x}$
Nature de l'onde:

Le champ magnétique associé s'écrit:

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est:

Exemple 2: soit une onde dont le champ électrique est donné par : $\overrightarrow{E} = E_0 \sin(\beta z) \cos(\omega t - kx) \overrightarrow{e_y}$
Nature de l'onde:

Le champ magnétique associé se déduit de:

Le vecteur de Poynting en moyenne est selon