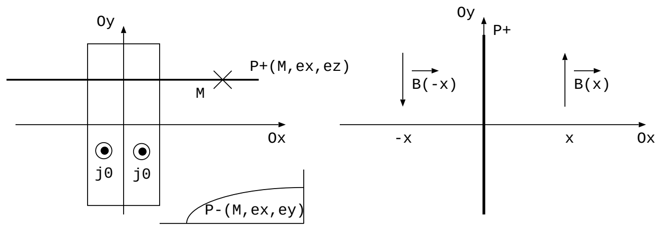
Correction TD magnétostatique

I. Champ créé par un parallélépipède

1. M appartient au plan $P^+(M, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ donc le champ magnétique en M est perpendiculaire à ce plan, donc il est selon $\overrightarrow{e_y}$.

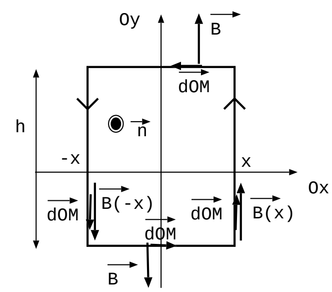
Il y a invariance par translation selon Oy et Oz donc les variables y et z n'interviennent pas.

On a donc $\overrightarrow{B}(M) = B(x)\overrightarrow{e_y}$.

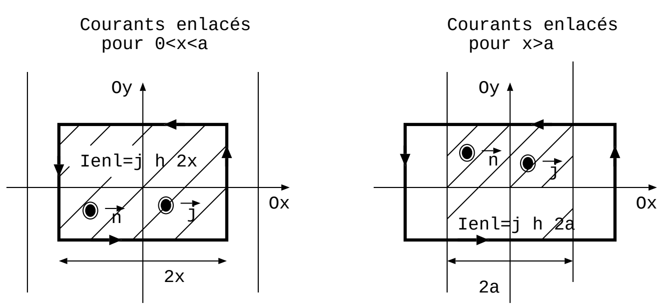


2. Les points $M(x)$ et $M'(-x)$ sont symétriques par rapport au plan $P^+(Oyz)$ donc les champs magnétiques en ces deux points sont antisymétriques par rapport à ce plan. Le schéma montre que $\overrightarrow{B}(-x) = -\overrightarrow{B}(x)$.

3. Les lignes de champ magnétique sont des droites parallèles à Oy. On choisit pour contour d'Ampère un rectangle compris entre $-x$ et x et de hauteur h. On a $\mathcal{C} = \displaystyle\int \overrightarrow{B}(M).d\overrightarrow{OM} = 2B(x)h$.



On applique le théorème d'Ampère en distinguant deux cas:



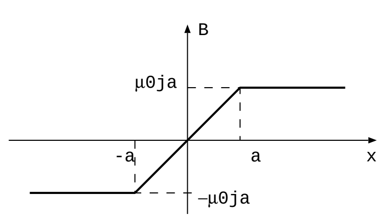
Pour $0 < x < a$: les courant enlacés par le contour sont ceux qui traversent la surface $2xh$ soit $I_{enl} = j2xh$.

$\mathcal{C} = 2B(x)h = \mu_0 j2xh$ d'où $\overrightarrow{B} = \mu_0 jx\overrightarrow{e_y}$.

Pour $x > a$: les courant enlacés par le contour sont ceux qui traversent la surface $2ah$ soit $I_{enl} = j2ah$.

$\mathcal{C} = 2B(x)h = \mu_0 j2ah$ d'où $\overrightarrow{B} = \mu_0 ja\overrightarrow{e_y}$.

On trouve le champ magnétique pour $x < 0$ à l'aide de la relation $\overrightarrow{B}(-x) = -\overrightarrow{B}(x)$, la fonction $B(x)$ est impaire.



4. La relation de Maxwell-Ampère s'écrit: $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$ avec $\overrightarrow{B} = B(x)\overrightarrow{e_y}$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla}\Lambda\overrightarrow{B} = \frac{d}{dx}\overrightarrow{e_x}\Lambda B(x)\overrightarrow{e_y} = \frac{dB}{dx}\overrightarrow{e_z}$.

Pour $x < -a$: $j = 0$ soit $\frac{dB}{dx} = 0$ et $B(x) = A$

Pour $-a < x < a$: $\frac{dB}{dx} = \mu_0 j$ soit $B(x) = \mu_0 jx + C$ et la fonction $B(x)$ étant impair on a $B(x=0) = 0 = C$ soit $B(x) = \mu_0 jx$.

Pour $x > a$: $j = 0$ soit $\frac{dB}{dx} = 0$ et $B(x) = D$

On trouve A et D en utilisant la continuité du champ magnétique en $x = -a$ et $x = a$:

$B(x = -a^-) = B(x = -a^+)$ soit $A = \mu_0 j(-a)$

$B(x = +a^-) = B(x = +a^+)$ soit $\mu_0 ja = D$.

II. **Tore**

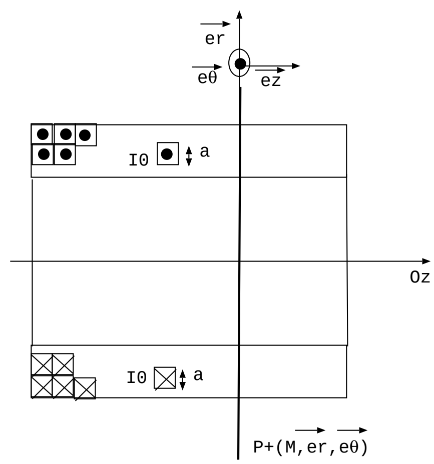
Voir feuille.

III. **Création d'un champ magnétique intense**

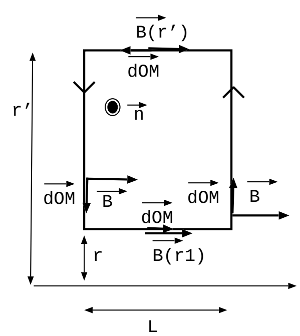
1. M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) mais le champ magnétique ne dépend pas de θ car il y a invariance par rotation autour de Oz et ne dépend pas de z car il y a invariance par translation selon Oz (les cylindres sont infinis) donc $B(M) = B(r)$.

M appartient au plan $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ donc le champ magnétique en M est perpendiculaire à ce plan donc le champ magnétique est selon $\overrightarrow{e_z}$.

On a donc $\overrightarrow{B} = B(r)\overrightarrow{e_z}$.



2. Les lignes de champ magnétique sont des droites parallèles à Oz on choisit pour contour d'Ampère un rectangle de longueur L placé entre r et $r' > r$. La circulation de $\overrightarrow{B}$ sur ce contour s'écrit: $\mathcal{C} = \int \overrightarrow{B}(M).d\overrightarrow{OM} = B(r)L - B(r')L$.



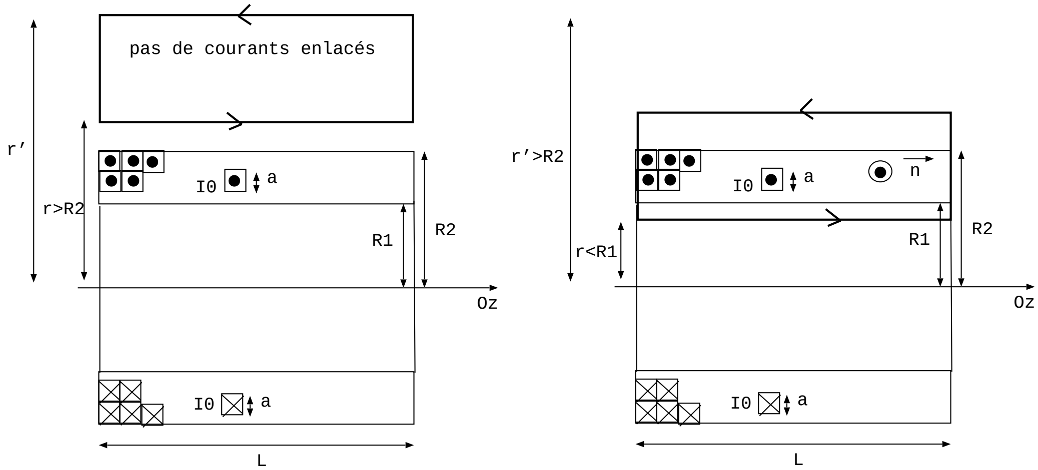
On place le contour d'Ampère à l'extérieur du solénoide soit pour $R_2 < r < r'$. Il n'y a pas de courant enlacé qui traverse ce contour donc $\mathcal{C} = B(r)L - B(r')L = 0$ soit $B(r) = B(r')$ ce qui traduit que le champ magnétique est uniforme à l'extérieur du solénoide.

3. On place le contour de telle façon que $r < R_1$ et $r' > R_2$, on a donc $B(r') = 0$ (champ nul à l'extérieur du solénoide). On cherche $B(r)$ qui est donc le champ à l'intérieur du solénoide.

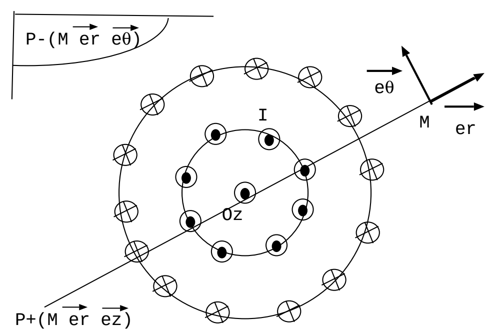
La surface traversée par des courants est $L(R_2 - R_1)$ et un fil de section a^2 est parcouru par une intensité I_0 donc sur la surface $L(R_2 - R_1)$, il y a $N = \frac{L(R_2 - R_1)}{a^2}$ fils qui traversent soit un courant enlacé

$I_{enl} = NI_0 = \dfrac{L(R_2 - R_1)}{a^2} I_0.$

On applique le théorème d'Ampère: $\mathcal{C} = B(r)L - B(r')L = B(r)L = \mu_0 \dfrac{L(R_2 - R_1)}{a^2} I_0$ d'où $B(r) = \mu_0 \dfrac{(R_2 - R_1)}{a^2} I_0$.



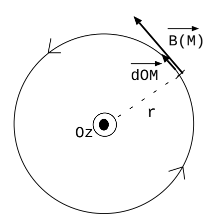
IV. **Câble coaxial**



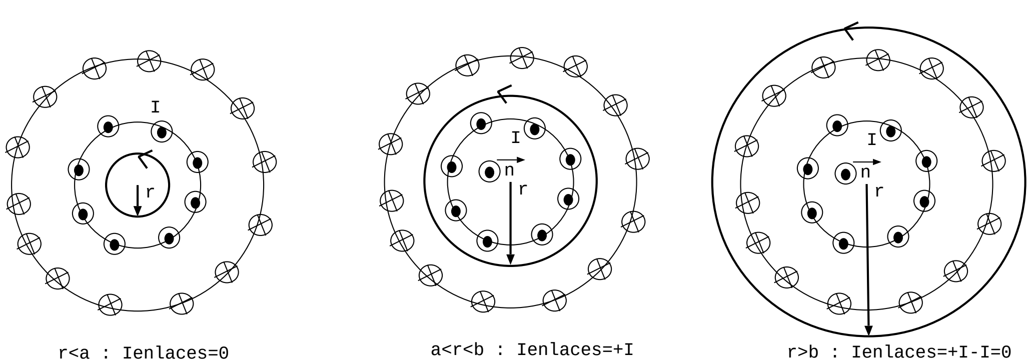
1. M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) mais le champ magnétique ne dépend pas de θ car il y a invariance par rotation autour de Oz et ne dépend pas de z car il y a invariance par translation selon Oz (les cylindres sont infinis) donc $B(M) = B(r)$.

M appartient au plan $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ donc le champ magnétique en M est perpendiculaire à ce plan donc le champ magnétique est selon $\overrightarrow{e_\theta}$.

On a donc $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\overrightarrow{e_\theta}$.



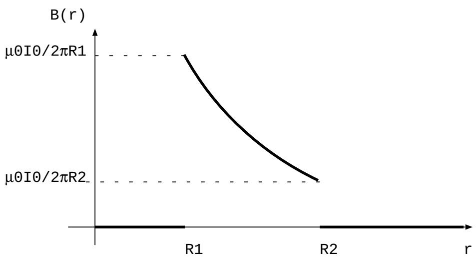
2. On choisit pour contour d'Ampère une ligne de champ soit un cercle centré sur Oz et de rayon $r = HM$. On oriente ce contour selon $+Oz$. On calcule la circulation du champ magnétique sur ce contour soit $\mathcal{C} = \displaystyle\int B(r)\overrightarrow{e_\theta}.d\overrightarrow{OM} = \int B(r) r d\theta = B(r) r \int_0^{2\pi} d\theta = B(r) 2\pi r$.



Pour $r < a$, il n'y a pas de courants enlacés donc $B(r) = 0$.

Pour $a < r < b$, les courants enlacés sont donnés par I (la somme des courants est égale à I), l'application du théorème d'Ampère conduit donc à $\mathcal{C} = B(r)2\pi r = \mu_0 I$ soit $\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$.

Pour $r > b$, la somme des courants enlacés est $+I - I$, elle est nulle donc $B(r) = 0$.



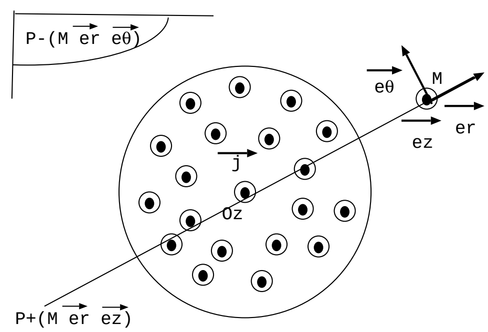
On observe que le champ magnétique est discontinu en R_1 et en R_2, cela s'explique par la modélisation avec des courants surfaciques. Les courants sont en réalité en volume et sur une faible épaisseur nous les avons modélisé par des courants surfaciques. Lorsqu'on s'approche de R_1 et de R_2, on atteint les limites du modèle, le champ est continu si on tient compte de l'épaisseur sur laquelle on trouve les courants.

3. On calcule l'énergie magnétique dans l'espace entre a et a en calculant l'intégrale $W_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \iiint \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} dr r d\theta dz = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^h dz = \frac{\mu_0 I^2 h}{8\pi^2} 2\pi h \ln(\frac{b}{a}) = \frac{\mu_0 h I^2}{4\pi} \ln(\frac{b}{a}) = \frac{LI^2}{2}$ (le champ est nul en dehors de l'espace interconducteur donc il n'y a pas d'énergie magnétique pour $r < a$ et pour $r > b$). On en déduit L: $L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln(\frac{b}{a})$.

V. **Répartition non uniforme de courants**

1. M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) mais le champ magnétique ne dépend pas de θ car il y a invariance par rotation autour de Oz et ne dépend pas de z car il y a invariance par translation selon Oz (les cylindres sont infinis) donc $B(M) = B(r)$.

M appartient au plan $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ donc le champ magnétique en M est perpendiculaire à ce plan donc le champ magnétique est selon $\overrightarrow{e_\theta}$.



2. Tous les plans passant par Oz sont des plans P^+ donc le champ magnétique en O est perpendiculaire à tous ces plans, donc $\overrightarrow{B}(O) = \overrightarrow{0}$.

3. La relation de Maxwell-Ampère s'écrit: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$ avec $\overrightarrow{B} = B(r)\overrightarrow{e_\theta}$ soit $B_r = 0$, $B_\theta = B(r)$ et $B_z = 0$ d'où $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \frac{1}{r}\frac{d(rB(r))}{dr}\overrightarrow{e_z}$.

Pour $r < a$: on a donc $\frac{1}{r}\frac{d(rB(r))}{dr}\overrightarrow{e_z} = \mu_0 \frac{j_0 r}{a}\overrightarrow{e_z}$ soit $\frac{d(rB(r))}{dr} = \mu_0 \frac{j_0 r^2}{a}$.

On intègre par rapport à r: $rB(r) = \mu_0 \frac{j_0 r^3}{a3} + A$ qui donne $B(r) = \mu_0 \frac{j_0 r^2}{3a} + \frac{A}{r}$. En $r = 0$ le terme $fracAr$ diverge donc on doit avoir $A = 0$.

Pour $r > a$: on a donc $\frac{1}{r}\frac{d(rB(r))}{dr}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$ soit $\frac{d(rB(r))}{dr} = 0$ et $rB(r) = C$ ou encore $B(r) = \frac{C}{r}$.

On utilise la continuité du champ magnétique pour trouver C soit $B(r = a^-) = B(r = a^+)$ soit $\mu_0 \frac{j_0 a^2}{a3} = \frac{C}{a}$ et $C = \mu_0 \frac{j_0 a^2}{3}$.