

DS 7 de physique

Le sujet comprend trois problèmes et un exercice indépendants à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numérotter les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages.

Il est demandé un effort de présentation (tirer un trait entre chaque question et encadrer les résultats) et de rédaction (prendre soin de nommer les lois utilisées, les hypothèses pour les appliquer et expliquer clairement).

I. Problème I : Etude d'un diapason

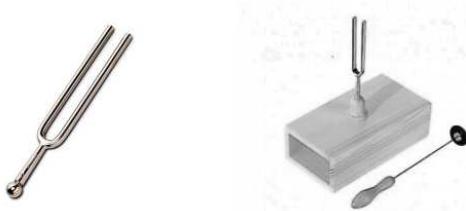
Données: $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

- En coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{u_z}$$

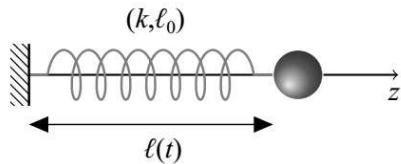
$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \overrightarrow{u_z}$$

Ce problème porte sur l'étude d'un oscillateur mécanique faiblement amorti très utilisé en musique : le diapason. La partie I est indépendante des parties II et III.



Partie I - Étude de la réponse percussive

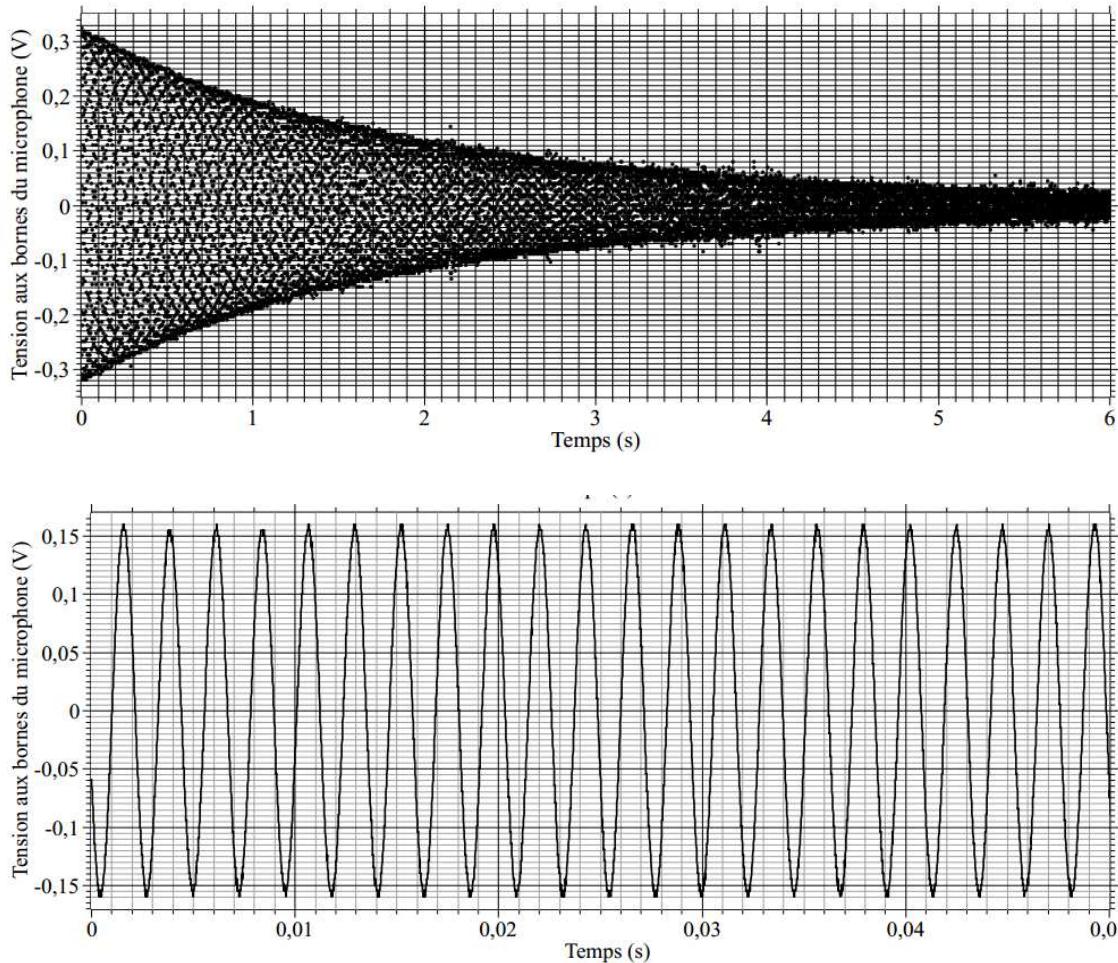
Les branches du diapason sont décrites comme un oscillateur masse-ressort oscillant selon un axe horizontal, amorti par frottement fluide linéaire en la vitesse. La coordonnée z repère la position de la masselotte sur l'horizontale.



On note m la masse de la masselotte, k la constante de raideur du ressort linéaire équivalent, l_0 sa longueur à vide et $l(t)$ sa longueur à l'instant t . De plus, on suppose que la masselotte est soumise à une force de frottement de la forme $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$.

À l'instant $t = 0$, on percute l'une des branches du diapason, ce qui provoque la mise en mouvement de chaque branche. On suppose le choc instantané, c'est-à-dire que les branches pseudo-oscillent librement pour $t > 0$. Une note est alors émise.

1. On note $z(t) = l(t) - l_0$, montrer que $z(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$. Exprimer ω_0 et Q en fonction de k , m et λ .
2. Sachant que l'on obtient des pseudo-oscillations, établir l'expression littérale de $z(t)$ en fonction de k , m et λ et de constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.
3. Pour estimer le facteur de qualité du diapason, on réalise un enregistrement à l'aide d'un microphone en utilisant un diapason équipé d'une caisse de résonance en bois permettant d'augmenter l'intensité de l'émission sonore. On obtient les deux enregistrements suivants:



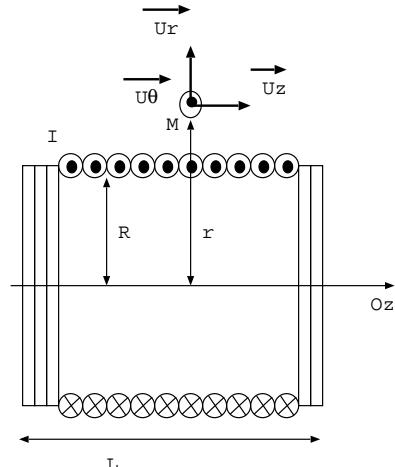
Exploiter ces courbes pour estimer numériquement au mieux la fréquence propre f_0 et le facteur de qualité Q du diapason (on reproduira sommairement la (ou les) figure(s) utilisées pour faire apparaître la méthode graphique employée pour ces déterminations).

Partie II - Génération du champ exciteur

Un solénoïde long (longueur L , rayon R), d'axe Oz , parcouru par un courant d'intensité I et possédant n spires par unité de longueur est utilisé pour générer un champ magnétostatique \vec{B} .

4. Dans l'approximation du solénoïde infini, justifier que le champ magnétostatique en tout point M à l'intérieur du solénoïde est de la forme $\vec{B} = B(r)\vec{U}_z$ où r est la distance de M à la droite Oz et \vec{U}_z le vecteur unitaire dirigeant l'axe Oz dans le sens des z croissants.

5. Justifier que le champ magnétostatique est uniforme à l'intérieur du solénoïde infini. Établir son expression en admettant qu'il est nul à l'extérieur.



6. Estimer la norme B_0 de ce champ pour un bobinage de $1,0 \cdot 10^{-3}$ spires.m $^{-1}$ avec $I = 0,1$ A. Comparer cette valeur à l'ordre de grandeur de la valeur du champ magnétique terrestre.

7. Quel est l'intérêt d'avoir supposé le solénoïde infini? À quelle(s) condition(s) cette approximation est-elle valide?

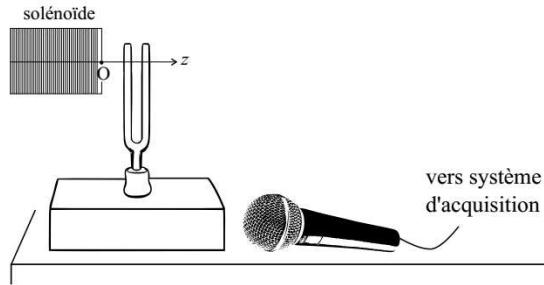
On suppose maintenant que le courant $i(t) = I \cos(\omega t)$ parcourant les spires du solénoïde est lentement variable.

8. En admettant que l'expression du champ magnétique obtenue précédemment reste valide à condition de remplacer I par $i(t)$, justifier qu'en tout point M à l'intérieur du solénoïde, le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est de la forme: $\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{U}_\theta$.

9. On donne l'équation de Maxwell Faraday: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Déduire de cette équation l'expression de $E(r, t)$ en fonction de I , μ_0 , r , n et $\sin(\omega t)$.

Partie III - Interaction entre le champ excitateur et une branche du diapason

Le champ électromagnétique obtenu précédemment est utilisé pour forcer des oscillations mécaniques des branches du diapason. Les branches du diapason sont positionnées près d'une extrémité du solénoïde.



On admet que le champ magnétique dans l'air au voisinage du diapason s'écrit $\vec{B}(M, t) = b(z) \cos(\omega t) \vec{U}_z$ avec $b(z) = B_0(1 - \frac{z}{R})$. Le fer qui constitue les branches du diapason s'aimante en présence du champ magnétique excitateur. On admet qu'en présence du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ dans l'air, l'élément de volume $d\tau$, centré sur le point M dans le diapason, se comporte comme un aimant de moment magnétique $d\vec{\mathcal{M}}(M, t)$ tel que:

$$d\vec{\mathcal{M}}(M, t) = \chi \vec{B}(M, t) d\tau \quad \text{où } \chi \text{ est une constante réelle positive}$$

On rappelle que la force subie par un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$ placée dans un champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ s'écrit:

$$\vec{F}_m = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \text{grad} \vec{B}) \vec{B}$$

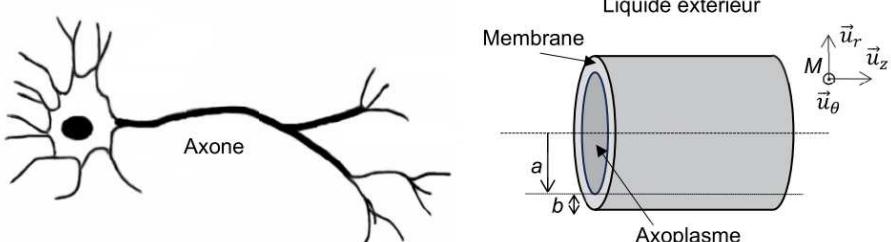
10. On considère un élément de volume $d\tau$, centré sur le point M , situé au voisinage de la surface du diapason. Montrer que la force $d\vec{F}_m$ subie par cet élément de volume, dans le cadre du modèle développé dans cette partie, s'écrit à l'ordre le plus bas : $d\vec{F}_m = -\alpha \cos^2(\omega t) d\tau \vec{U}_z$ où α est une constante positive que l'on exprimera en fonction de χ , B_0 et R . Montrer que les dipôles induits sont attirés vers la zone de champ fort.

11. Pour un diapason résonant à la fréquence 256 Hz, à quelle fréquence doit-on régler la source du courant $i(t)$ pour exciter le diapason à résonance?

II. Problème II: Electrocardiogramme

L'électrocardiogramme permet un suivi du fonctionnement cardiaque par le simple port d'électrodes collées à la peau. Nous allons d'abord étudier le fonctionnement électrique des nerfs puis appliquer le modèle du dipôle électrostatique à l'électrocardiogramme.

Partie A: fonctionnement électrique d'un nerf



Un neurone est une cellule complexe dont nous allons étudier une partie, l'axone, ou fibre nerveuse, qui conduit le signal nerveux électrique dans le corps humain.

On modélise un axone par un cylindre infiniment long d'axe (O, \vec{U}_z) , de rayon intérieur a . Il est constitué d'une membrane d'épaisseur b et de permittivité relative ϵ_r et d'un axoplasme à l'intérieur de cette membrane (voir figure).

Données: $a = 5,0 \mu\text{m}$, $b = 7,0 \text{ nm}$, $\epsilon_r = 8,0$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

L'axoplasme est au potentiel V_A tandis que le liquide extérieur est au potentiel V_E . La face intérieure de la membrane porte la charge $+Q$ (pour $r = a$) et la face extérieure de la membrane porte la charge $-Q$ (pour $r = a + b$). Ces charges sont uniformément réparties sur les surfaces.

On travaille en régime stationnaire. On utilise la base locale $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_z)$ et les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On admet que les calculs du champ dans la membrane sont identiques à ceux du vide à condition de remplacer ϵ_0 par $\epsilon_0 \epsilon_r$.

1. Montrer que le champ électrique $\vec{E}(M)$ dans la membrane ne dépend que de r et est selon \vec{U}_r . Déduire du théorème de Gauss l'expression du champ électrique dans la membrane en fonction de Q , ϵ_0 , ϵ_r , a , r et L (la longueur de l'axone).

2. En déduire l'expression de la différence de potentiel $V_A - V_E$ en fonction de Q , ϵ_0 , ϵ_r , a , b et L . Dans la suite on suppose $a \gg b$. Donner une expression approchée de $V_A - V_E$. On donne $\ln(1 + x) \approx x$ pour $x \ll 1$.

3. En déduire la capacité C de la membrane. On trouve dans la littérature médicale $c_m = 1,10^{-2} \text{ F.m}^{-2}$ pour la capacité par unité de surface de membrane. Vérifier que cette valeur est compatible avec l'expression de C trouvée.

On donne $V_A - V_E = -60 \text{ mV}$. Calculer la densité surfacique de charge de la membrane intérieure (en $r = a$).

En réalité ce potentiel et cette répartition de charges correspond à une situation où l'axone est au repos. Quand un influx nerveux se propage, le potentiel change suivant des mécanismes biologiques que nous n'étudierons pas ici (voir figure 10). On appelle le signal correspondant potentiel d'action.

Lorsque le cœur bat, il y a un potentiel d'action qui se propage dans le cœur. Par conséquent, on peut considérer qu'une partie du cœur est chargée positivement et une autre partie négativement. Cela ressemble à un dipôle électrostatique. Cette modélisation très simple permet d'expliquer de façon très satisfaisante les électrocardiogrammes.

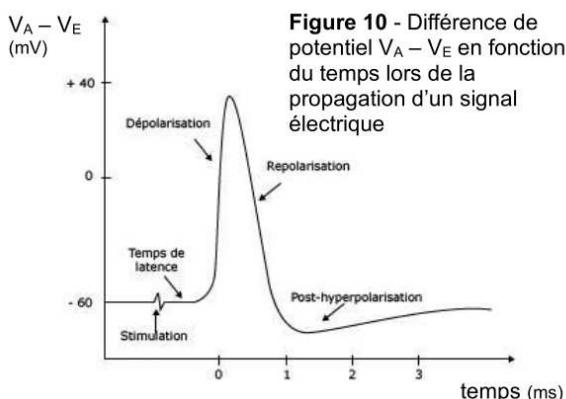


Figure 10 - Différence de potentiel $V_A - V_E$ en fonction du temps lors de la propagation d'un signal électrique

Partie B: réalisation et exploitation d'un électrocardiogramme

Dans notre modèle simplifié, le muscle cardiaque se comporte comme un dipôle électrique qui varie suffisamment lentement pour que l'on puisse appliquer les formules de la statique. On rappelle que le potentiel créé au point M de position $\vec{OM} = r\vec{U}_r$ par un dipôle électrostatique placé en O de moment dipolaire \vec{p} s'écrit $V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 OM^3}$.

Un électrocardiogramme est un tracé contenant 12 lignes correspondant à la mesure de 12 tensions mesurées entre différentes électrodes situées sur le corps humain. Nous n'allons nous intéresser qu'à une de ces mesures de tension, entre deux électrodes placées l'une au poignet gauche (G) et l'autre au poignet droit (D). On mesure alors la tension $U_1 = V_G - V_D$ en fonction du temps. Le cœur placé en O est à égale distance d des électrodes $d = OG = OD$ (figure 11).

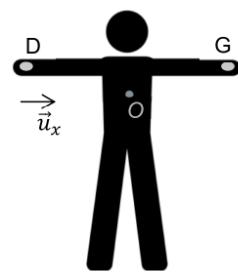


Figure 11 - Position des électrodes

4. En utilisant la formule $\vec{p} \cdot \vec{OM}$ donnée plus haut, montrer que U_1 est proportionnelle à la projection du dipôle électrostatique du cœur sur la direction \vec{U}_x entre D et G . On notera K la constante de proportionnalité, qu'on exprimera en fonction de ϵ_0 , d et de DG la distance entre G et D .

5. Le tableau Figure 12 représente le dipôle électrique du cœur à différents instants t_i successifs pendant un cycle cardiaque (un point représente un dipôle nul). On précise l'orientation du vecteur \vec{U}_x en bas à droite.

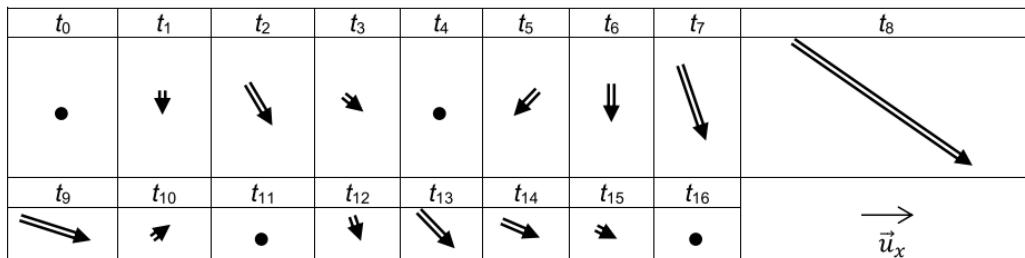


Figure 12 - Évolution du dipôle électrique cardiaque en fonction du temps (avec $t_i < t_{i+1}$)

Sur la Figure 13, auquel de ces 4 graphes (représentant la tension U_1 au cours du temps) l'enregistrement peut-il correspondre? Justifier soigneusement votre réponse.

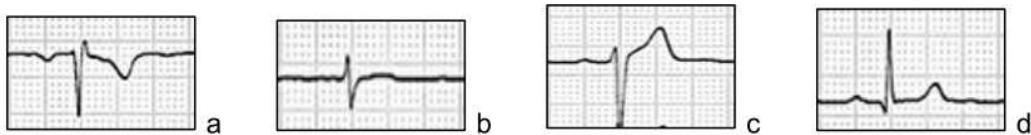
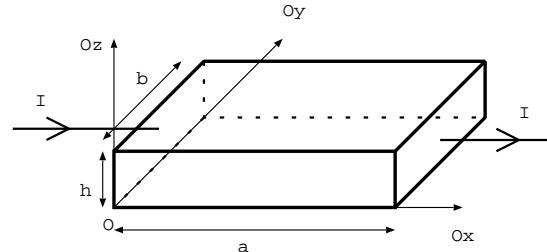


Figure 13 - 4 des 12 enregistrements d'un ECG

III. Problème III : effet Hall

Soit une portion de conducteur de dimensions a, b, h . Ce conducteur est inséré dans un circuit parcouru par un courant d'intensité $I > 0$. On notera n la densité volumique de porteurs de charge et \vec{v} la vitesse d'un porteur de charge dans le volume. Les particules portent la charge q dont on ne connaît à priori pas le signe. On suppose dans un premier temps qu'il n'y a qu'un seul type de porteurs.



Approche qualitative de l'effet Hall

1. Rappelez l'expression de \vec{j} , vecteur densité volumique de courant, en fonction n , q et \vec{v} . et du vecteur vitesse d'un porteur de charge. Si les porteurs de charges sont des électrons de charge $q = -e$, quel est le sens de \vec{j} ? quel est le sens de \vec{v} ?

On place le volume dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$ avec $B_0 > 0$, supposé uniforme à l'échelle de l'échantillon.

2. En considérant la direction et le sens de la force exercée par le champ magnétique sur un porteur de charge, expliquer en quelques mots pourquoi on voit apparaître une tension entre les faces d'équations $z = 0$ et $z = h$ du parallélépipède.

Faire deux schémas indiquant le signe des charges apparaissant sur chaque face : dans le cas où $q = -e < 0$ et dans le cas où $q = +e > 0$.

3. Expliquer en pratique comment on peut simplement vérifier le signe des porteurs de charges avec un voltmètre.

Approche quantitative de l'effet Hall (cas des électrons porteurs)

On se place dans le cas où les charges mobiles sont des électrons, donc $q = -e$. On notera n_e leur densité volumique et \vec{v}_e leur vitesse. On suppose qu'après un régime transitoire au cours duquel des charges ont

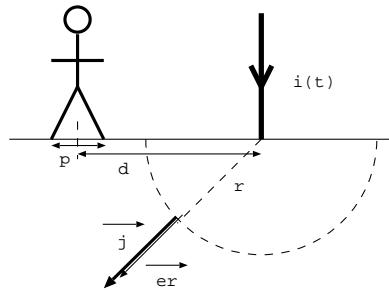
commencé à s'accumuler sur l'une des faces, on atteint un régime permanent où la quantité de charges accumulées sur les faces ne varie plus, donnant lieu à la création d'un champ électrique de Hall uniforme entre les faces noté \vec{E}_H . Par ailleurs les porteurs de charges mobiles ont repris leur mouvement d'ensemble à la vitesse \vec{v}_e uniforme et constante suivant Ox , l'intensité du courant électrique est toujours I .

4. En utilisant la partie "approche qualitative de l'effet Hall", expliquer quel est le sens de \vec{E}_H . Établir, en s'intéressant au mouvement d'un porteur de charge, la relation $\vec{E}_H = -\vec{v}_e \Lambda \vec{B}$.
5. En projetant suivant Oz la relation précédente, donner l'expression de E_H en fonction de B_0 et v_e puis en fonction de B_0 , e , n_e , I et des dimensions du conducteur.
6. Exprimer $U_H = V(z = h) - V(z = 0)$, la tension de Hall.
7. Dans le cas d'un conducteur comme le cuivre, les seuls porteurs sont des électrons. On suppose que dans le cristal chaque atome de cuivre libère un électron de conduction. En utilisant les données du tableau calculer la tension de Hall U_H .

Masse molaire du cuivre	$M = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$
Masse volumique du cuivre	$\mu = 8\,900 \text{ kg.m}^{-3}$
Constante d'Avogadro	$N_a = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Champ magnétique	$B_0 = 0,1 \text{ T}$
Dimensions du conducteur	$h = 5,5 \text{ mm}$ et $a = b = 0,2 \text{ mm}$
Intensité du courant	$I = 0,1 \text{ A}$

IV. Exercice: la foudre

Un éclair est associé à un déplacement de charges soit à un courant électrique. Dans l'air, on assimile ce courant à celui d'un fil rectiligne, parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ uniformément réparti. Dans le sol, on suppose que la densité de courant volumique est radiale, de la forme $\vec{j} = j(r, t)\vec{e}_r$ où \vec{e}_r est le vecteur unitaire radial de la base sphérique. Le sol possède une conductivité électrique γ . Un homme se trouve à la distance moyenne d du point d'impact de la foudre et la distance entre ses pieds est notée p .



1. Montrer que le champ électrique dans le sol a pour expression $\vec{E} = \frac{i(t)}{2\pi\gamma r^2} \vec{e}_r$.
2. Exprimer la différence de potentiel $U_p > 0$ entre les pieds de l'homme fonction de p , d , $i(t)$ et γ .
On donne l'opérateur gradient en coordonnées sphériques : $\vec{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$
3. La résistance moyenne du corps humain est notée R . Exprimer l'intensité I du courant qui traverse le corps humain.