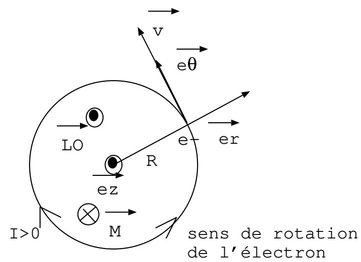
TD dipôle magnétique

I. **Estimation de la taille du noyau terrestre**

1.

1.a. Le moment cinétique est $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{OM} \Lambda m\overrightarrow{v} = R\overrightarrow{e_r} \Lambda mv\overrightarrow{e_\theta} = mvR\overrightarrow{e_z}$.



1.b. L'intensité s'écrit $I = \frac{dq}{dt}$ où dq est la charge qui traverse la section du fil pendant dt. Ici la charge $-e$ passe tous les temps $T = \frac{2\pi R}{v}$ (T est la période du mouvement). On a donc $I = \frac{e}{T} = \frac{ve}{2\pi R}$ (le courant I est pris positif dans l'énoncé, sur le schéma, ce courant circule dans le sens inverse de déplacement de l'électron).

Le moment magnétique est orienté par I avec la règle de la main droite. Le courant est dans le sens inverse du mouvement de l'électron donc le moment est selon $-\overrightarrow{e_z}$, il s'écrit $\overrightarrow{M} = -I\pi R^2\overrightarrow{e_z} = -\frac{veR}{2}\overrightarrow{e_z}$ où πR^2 est la surface de la boucle de courant I.

On a donc la relation $\overrightarrow{M} = -\frac{e}{2m}\overrightarrow{L_0}$.

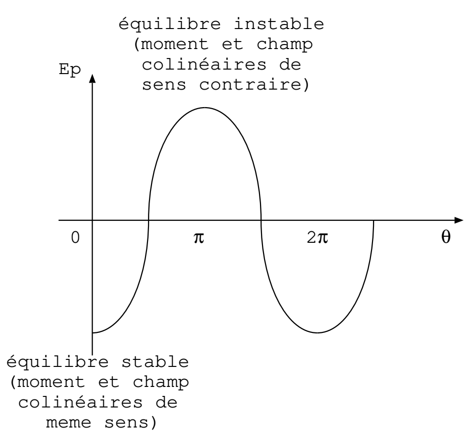
1.c. Le moment cinétique est quantifié selon $L_O = n\hbar$ donc le moment magnétique est quantifié aussi selon $M = \frac{e}{2m}L_O = n\frac{e\hbar}{2m} = n\mu_B$ avec $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$. AN: $\mu_B = 8,8.10^{-24}\ A.m^2$.

2. Le nombre d'atomes qui contribuent à l'aimantation est $N = \frac{\mathcal{M}}{\mu_B}$.

3. $V = \frac{m}{\rho} = \frac{nM}{\rho} = \frac{NM}{\rho N_a} = \frac{4\pi R^3}{3}$. On en déduit R. Le rayon trouvé est plus faible que le rayon du noyau, cela signifie que tous les atomes du noyau ne participent pas à l'aimantation du noyau.

II. **Méthode des oscillations**

1.



2. On applique le TMC au petit aimant qui subit le couple $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{M}\Lambda\overrightarrow{B_T} = M(\cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y})\Lambda B_T\overrightarrow{e_x} = -MB_T\sin\theta\overrightarrow{e_z}$ soit $J\ddot{\theta}\overrightarrow{e_z} = -MB_T\sin\theta\overrightarrow{e_z}$ et donc $\ddot{\theta} + \frac{MB_T}{J}\sin\theta = 0$.

Pour des petites oscillations, l'angle θ est petit, l'équation devient $\ddot{\theta} + \frac{MB_T}{J}\theta = 0$. On reconnaît un OH de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{MB_T}{J}}$ soit de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{MB_T}}$.

Pour trouver B_T, il faut connaître le moment magnétique M et le moment d'inertie J du petit aimant.

3. On applique le résultat précédent avec $B = B_T + B_0$ et $B = B_T - B_0$ soit on obtient les périodes des petites oscillations respectives: $T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M(B_T + B_0)}}$ et $T'' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M(B_T - B_0)}}$.

3.a. On peut produire un champ magnétique homogène à l'aide d'un aimant en U: dans le U le champ est uniforme du pôle nord vers le pôle sud ou à l'aide d'un solénoide: le champ magnétique est orienté par la règle de la main droite à partir du sens du courant dans le solénoide.

3.b. On a donc $(\frac{T'}{T''})^2 = \frac{B_T - B_0}{B_T + B_0}$ d'où $B_T = B_0 \frac{T'^2 - T^2}{T'^2 + T^2}$. Avec cette façon de procéder, on n'a pas besoin de connaître les caractéristiques du petit aimant pour trouver le champ magnétique terrestre.

III. Champ magnétique terrestre

1. Le moment magnétique est dirigé selon $-Oz$, ce qui implique que le pôle nord géographique est un pôle sud magnétique et réciproquement.
$\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{OM} = -\mathcal{M}_\prime r \cos\theta = -\mathcal{M}_\prime r \sin\lambda$
$\overrightarrow{\mathcal{M}} = -\mathcal{M}_\prime(\cos\theta \overrightarrow{e_r} - \sin\theta \overrightarrow{e_\theta}))$

On remplace dans l'expression donnée et on obtient $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3r\overrightarrow{e_r}(-\mathcal{M}_\prime r\cos\theta) - r^2(-\mathcal{M}_\prime(\cos\theta\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta})}{r^5} = \frac{-\mu_0\mathcal{M}_\prime}{4\pi r^3}(2\cos\theta\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\overrightarrow{e_\theta})$.
A la surface de la Terre, on remplace r par R_T.

2. A l'équateur $\theta = \pi/2$ ou $\lambda = 0$ donc $B_E = \frac{\mu_0|M_0|}{4\pi R_T^3}$ soit $M_0 = \frac{B_E 4\pi R_T^3}{\mu_0} = 7,9.10^{22}\ A.m^2$.

Aux pôles on a $\theta = 0$ ou π (soit $\lambda = \pm\pi/2$), $B_P = \frac{2\mu_0 M}{4\pi R_T^3} = 2B_E$

IV. Expérience de Stern et Gerlach

1. D'après la statistique de Boltzmann, l'énergie d'un atome est égale à $\frac{1}{2}k_B T$ par degré de liberté. Un atome a trois degrés de liberté de translation soit $E_c = \frac{3k_B T}{2}$ d'où $T = \frac{2E_c}{3k_B} = 820\ K$.

2. **2.a.** On a $\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{\text{grad}} = \mathcal{M}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{M}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{M}_z\frac{\partial}{\partial z}$.

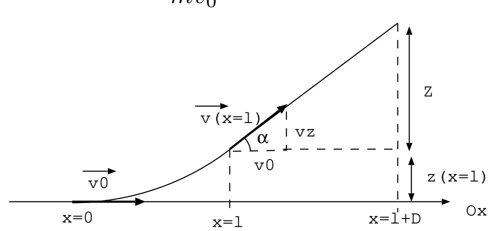
On en déduit la force exercée sur le dipôle $\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{B} = (\mathcal{M}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{M}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{M}_z\frac{\partial}{\partial z})kz\overrightarrow{e_z} = \mathcal{M}_z k\overrightarrow{e_z}$: la force est constante donc les atomes vont décrire une trajectoire parabolique vers le haut pour $\mathcal{M}_z > 0$ et vers le bas pour $\mathcal{M}_z < 0$.

2.b. On applique la RFD à un atome qui subit son poids (négligé) et la force magnétique $\overrightarrow{F}$ soit: $m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \mathcal{M}_z k\overrightarrow{e_z}$.
En projection sur Ox: $\ddot{x} = 0$ soit $\dot{x} = v_0$ et $x = v_0 t$
En projection sur Oy: $\ddot{y} = 0$ soit $\dot{y} = 0$ et $y = 0$
En projection sur Oz: $m\ddot{z} = \mathcal{M}_z k$ soit $\dot{z} = \frac{\mathcal{M}_z kt}{m}$ et $z = \frac{\mathcal{M}_z kt^2}{2m}$
On a $t = \frac{x}{v_0}$ d'où $z(x) = \frac{\mathcal{M}_z kx^2}{2mv_0^2} = \frac{\mathcal{M}_z kx^2}{4E_c}$.

2.c. Dans la zone où ne régne pas le champ magnétique, les atomes subissent leur poids (négligé) et décrivent donc une droite à vitesse constante $\overrightarrow{v}(x = l) = v_0\overrightarrow{e_x} + \frac{\mathcal{M}_z kl}{mv_0}\overrightarrow{e_z}$ (j'ai remplacé t par $\frac{x}{v_0} = \frac{l}{v_0}$.

On a $\tan\alpha = \frac{v_z}{v_0} = \frac{Z}{D}$ avec $v_z = \frac{\mathcal{M}_z kl}{mv_0}$ donc $Z = D\frac{v_z}{v_0} = \frac{D\mathcal{M}_z kl}{mv_0^2} = \frac{D\mathcal{M}_z kl}{2E_c}$.

Soit $z_0 = z(x = l) + Z = \frac{\mathcal{M}_z kl^2}{4E_c} + \frac{D\mathcal{M}_z kl}{2E_c} = \frac{l\mathcal{M}_z k}{4E_c}(2D + l)$.



2.d. AN: $z_0 = \pm 0,30\ mm$.