Correction TD équations de Maxwell

I. **Equation de Maxwell-Gauss**

1. M appartient aux plans $P^+(M,\vec{e_x},\vec{e_y})$ et $P^+(M,\vec{e_x},\vec{e_z})$ donc $\vec{E}(M)$ appartient à ces plans donc $\vec{E}(M)$ est selon Ox.

Il y a invariance par translation selon Oy et Oz donc $\vec{E}=E(x)\vec{e_x}$.

O appartient aux plans $P^+(O,\vec{e_x},\vec{e_y})$, $P^+(O,\vec{e_x},\vec{e_z})$ et $P^+(M,\vec{e_y},\vec{e_z})$ donc $\vec{E}(O)$ appartient à ces plans donc $\vec{E}(O)$ est nul.

2. On applique l'équation de Maxwell-Gauss $div\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ avec $div\vec{E}=\vec{\nabla}.E(x)\vec{e_x}=\dfrac{dE}{dx}$.

Pour $x<-e$, $\rho=0$: $\dfrac{dE}{dx}=0$ donc $E(x)=A$

Pour $-e<x<e$, $\rho=\rho_0$: $\dfrac{dE}{dx}=\dfrac{\rho_0}{\epsilon_0}$ donc $E(x)=\dfrac{\rho_0 x}{\epsilon_0}+B$ avec $B=0$ car $E(x=0)=0$

Pour $x>e$, $\rho=0$: $\dfrac{dE}{dx}=0$ donc $E(x)=C$

On applique la continuité du champ électrique en $x=-e$: $A=-\dfrac{\rho_0 e}{\epsilon_0}$.

On applique la continuité du champ électrique en $x=+e$: $C=+\dfrac{\rho_0 e}{\epsilon_0}$.

II. **Equation de Maxwell-Ampère**

1. L'intensité s'écrit $I=\displaystyle\iint\vec{j}\,dS\vec{e_z}=\iint\frac{j_0r^2}{R^2}drrd\theta=\frac{j_0}{R^2}\int_0^R r^3dr\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{j_0}{R^2}\frac{R^4}{4}2\pi=\frac{j_0\pi R^2}{2}$ (ici on doit calculer l'intégrale, on ne peut pas sortir j de l'intégrale car il n'est pas uniforme).

2. M appartient au plan $P^+(M,\vec{e_r},\vec{e_z})$ donc $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan donc $\vec{B}(M)$ est selon $\vec{e_\theta}$.

Il y a invariance par translation selon Oz et par rotation autour de Oz donc $\vec{B}=B(r)\vec{e_\theta}$.

3. L'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire s'écrit $\vec{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}$ avec $B_r=B_z=0$ et $B_\theta=B_\theta(r)$.

On a donc $\vec{rot}\vec{B}=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(rB(r))\vec{e_z}$.

Pour $r<R$ on a $\vec{j}=\dfrac{j_0r^2}{R^2}\vec{e_z}$ soit $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(rB(r))=\mu_0\dfrac{j_0r^2}{R^2}$ donc $\dfrac{d}{dr}(rB(r))=\mu_0\dfrac{j_0r^3}{R^2}$ et $rB(r)=\mu_0\dfrac{j_0r^4}{4R^2}+A$ ou encore $B(r)=\mu_0\dfrac{j_0r^3}{4R^2}+\dfrac{A}{r}$. On doit avoir $A=0$ pour que le champ magnétique ne diverge pas quand r tend vers zéro.

Pour $r>R$ on a $\vec{j}=\vec{0}$ soit $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(rB(r))=0$ ou encore $\dfrac{d}{dr}(rB(r))=0$ donc $rB(r)=C$ et $B(r)=\dfrac{C}{r}$.

On trouve la constante C en écrivant que le champ magnétique est continu en $r=R$ soit: $B(r=R)=\mu_0\dfrac{j_0R^3}{4R^2}=\dfrac{C}{R}$ donc $C=\mu_0\dfrac{j_0R^2}{4}$.

III. **Flux du vecteur de Poynting**

1. M appartient au plan $P^+(M,\vec{e_r},\vec{e_z})$ et au plan $P^-(M,\vec{e_r},\vec{e_\theta})$ donc $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à P^- et $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à P^+ soit $\vec{B}(M)$ est selon $\vec{e_\theta}$: les lignes de champ magnétique sont des cercles centrés sur Oz et $\vec{E}(M)$ est selon $\vec{e_z}$: les lignes de champ électrique sont des droites parallèles à Oz.

Il y a invariance par translation selon Oz par rotation autour de Oz donc $\vec{B}(M)=B(r)\vec{e_\theta}$ et $\vec{E}(M)=E(r)\vec{e_z}$.

2. On a $I=j\pi R^2$ (pas d'intégrale à calculer car $\vec{j}$ est uniforme).

On a $R_c=\dfrac{L}{\gamma\pi a^2}$: la résistance mesure l'opposition du câble à laisser passer le courant, plus la section du câble et la conductivité sont faibles et plus la résistance est grande.

3. La loi d'Ohm conduit à $\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{j}}{\gamma} = \frac{I}{\gamma \pi a^2}\overrightarrow{e_z}$.

On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire de rayon r, centré sur Oz et orienté selon $\overrightarrow{n} = +\overrightarrow{e_z}$ soit $C = B(r)2\pi r = \mu_0 I_{enlaces}$.

Pour $r > R$: $I_{enlaces} = I$ soit $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$.

4. On en déduit le vecteur de Poynting $\overrightarrow{R} = \frac{\overrightarrow{E}\Lambda\overrightarrow{B}}{\mu_0} = -\frac{I}{\gamma\pi a^2}\frac{I}{2\pi r}\overrightarrow{e_r} = -\frac{I^2}{2\gamma\pi^2 a^2 r}\overrightarrow{e_r}$.

Soit à la surface du câble: $\overrightarrow{R}(r = a) = -\frac{I^2}{2\gamma\pi^2 a^3}\overrightarrow{e_r}$: le vecteur de Poynting est selon $-\overrightarrow{e_r}$, la puissance est donc reçue par le câble.

La puissance reçue est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la surface latérale du câble soit $P = -\frac{I^2}{2\gamma\pi^2 a^3}2\pi La = -\frac{I^2 L}{\gamma\pi a^2} = -R_c I^2$: la puissance reçue par le câble est ensuite entièrement sous forme de chaleur par effet Joule.

IV. Correction : chauffage par induction

1. M appartient au plan $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et au plan $P^-(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$.

Le champ magnétique en M est perpendiculaire au plan P^+ donc il est selon Oz, les lignes de champ magnétique sont des droites parallèles à Oz.

Le champ électrique en M est perpendiculaire au plan P^- donc il est selon $\overrightarrow{e_\theta}$, les lignes de champ électrique sont des cercles centrés sur Oz.

2. On utilise l'équation de Maxwell Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} = \frac{\mu_0\mu_r}{2R}\omega I_0\sin(\omega t)\overrightarrow{e_z}$.

Ici $E_r = E_z = 0$ et $E_\theta = E(r, t)$, donc on a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}\overrightarrow{e_z}$.

Ainsi l'équation de Maxwell conduit à $\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} = \frac{\mu_0\mu_r}{2R}I_0\omega\sin(\omega t)$ soit $\frac{d(rE_\theta)}{dr} = r\frac{\mu_0\mu_r I_0}{2R}\omega\sin(\omega t)$. On intègre par rapport à r : $rE_\theta = \frac{\mu_0\mu_r I_0 r^2\omega}{4R}\sin(\omega t) + A$ donc $E_\theta = \frac{\mu_0\mu_r I_0 r\omega}{4R}\sin(\omega t) + \frac{A}{r}$ (ici $A = 0$ car le champ électrique doit être défini en $r = 0$).

On a donc $\overrightarrow{E} = \frac{\mu_0\mu_r I_0 r\omega}{4R}\sin(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}$.

3. On en déduit $\overrightarrow{j}$ en appliquant loi d'Ohm locale: $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E} = \frac{\gamma r\mu_0\mu_r I_0\omega}{4R}\sin(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}$.

La puissance volumique liée à l'effet joule est la puissance cédée aux charges par le champ électrique c'est $\frac{dP}{d\tau} = p = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E} = \gamma E^2 = \gamma(\frac{r\mu_0\mu_r I_0\omega}{4R}\sin(\omega t))^2$ et donc en valeur moyenne par rapport au temps $< p >= \frac{\gamma}{2}(\frac{r\mu_0\mu_r I_0\omega}{4R})^2$.

4. En coordonnées cylindriques, l'élément de volume $d\tau$ s'écrit $dr.rd\theta.dz$ soit la puissance totale :

$$P = \int\iiint \frac{\gamma}{2}(\frac{r\mu_0\mu_r I_0\omega}{4R})^2 rdrd\theta dz = \frac{\gamma}{2}(\frac{\mu_0\mu_r I_0\omega}{4R})^2\int_0^a r^3 dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^e dz = \frac{\mu_0^2\mu_r^2 I_0^2\omega^2\gamma}{32R^2}\frac{a^4}{4}2\pi e = \frac{\mu_0^2\mu_r^2 I_0^2\omega^2\gamma a^4\pi e}{64R^2}.$$

5. On a $\mu_{r,fonte} = 80\mu_{r,al}$ et $\gamma_{al} = 40\gamma_{fonte}$.

La puissance dépend de $\mu_r^2\gamma$ soit $\mu_{r,fonte}^2\gamma_{fonte} = \frac{80^2}{40}\mu_{r,al}^2\gamma_{al} = 160\mu_{r,al}^2\gamma_{al}$ donc la puissance dégagée par la fonte est 160 fois plus grande que par l'aluminium, la cuisson sera plus efficace dans la poele en fonte.

V. Câble coaxial

1. Il y a invariance par rotation autour de Oz donc la variable θ n'intervient pas.

Attention ici les courants dépendent de z donc il n'y a pas invariance par translation selon Oz, la variable z intervient dans les expressions.

M appartient au plan $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ donc le champ magnétique en M est perpendiculaire à ce plan donc $\overrightarrow{B}(M,t)$ est selon $\overrightarrow{e_\theta}$, les lignes de champ magnétique sont des cercles centrés sur Oz.

2. On choisit pour contour d'Ampère un cercle de rayon HM centré sur Oz et orienté selon $\overrightarrow{e_z}$:

On a $C = \int B_0(r)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_\theta} dl \overrightarrow{e_\theta} = B_0(r)\cos(\omega t - kz)\int dl = 2\pi r B_0(r)\cos(\omega t - kz)$.

On applique le théorème d'Ampère selon lequel $C = \mu_0 I_{enlaces}$.

Pour $r < a$: il n'y a pas de courant enlacés donc $B_0(r) = 0$

Pour $r > b$: la somme des courants enlacés est nulle $I_{enlaces} = +i - i = 0$ donc $B_0(r) = 0$

Pour $a < r < b$: $I_{enlaces} = +i(z,t)$ soit $C = 2\pi r B_0(r)\cos(\omega t - kz) = \mu_0 i_0 \cos(\omega t - kz)$ donc $B_0(r) = \dfrac{\mu_0 i_0}{2\pi r}$.

3. L'équation de Maxwell- Faraday s'écrit: $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ avec ici $\overrightarrow{E} = E_r(r,z,t)\overrightarrow{e_r}$ ($E_z = E_\theta = 0$). Donc on a $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \dfrac{\partial E_r}{\partial z}\overrightarrow{e_\theta}$.

Pour $a < r < b$, l'équation de Maxwell-Faraday donne donc $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \dfrac{\partial E_r}{\partial z}\overrightarrow{e_\theta} = \dfrac{\mu_0 i_0 \omega}{2\pi r}\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{e_\theta}$ soit $\dfrac{\partial E_r}{\partial z} = \dfrac{\mu_0 i_0 \omega}{2\pi r}\sin(\omega t - kz)$ soit en intégrant par rapport à z (sans constante d'intégration car les constantes ne se propagent pas): $E_r = \dfrac{\mu_0 i_0 \omega}{2\pi r k}\cos(\omega t - kz) = \dfrac{\mu_0 i_0 c}{2\pi r}\cos(\omega t - kz)$ car dans le vide la relation de dispersion est $k = \dfrac{\omega}{c}$.

4. Le vecteur de Poynting est défini par $\overrightarrow{R} = \dfrac{\overrightarrow{E}\Lambda\overrightarrow{B}}{\mu_0}$.

Là où le champ magnétique est nulle, le vecteur de Poynting est nul soit pour $r < a$ et $r > b$. Donc le câble ne transporte de l'énergie que pour $a < r < b$. On a $< \overrightarrow{R} > = < \dfrac{\mu_0 i_0^2 c}{4\pi^2 r^2}\cos^2(\omega t - kz) > \overrightarrow{e_z} = \dfrac{\mu_0 i_0^2 c}{8\pi^2 r^2}\overrightarrow{e_z}$: le vecteur de Poynting est dans la direction de propagation de l'onde.

On en déduit la puissance moyenne dans le câble: elle est définie comme le flux du vecteur de Poynting à travers la section du câble soit $< P > = \iint < \overrightarrow{R} > dS\overrightarrow{n}$, ici $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_z}$ et $dS = dr r d\theta$ (on intègre sur la surface comprise entre les disques de rayons a et b).

Soit $< P > = \int_a^b \dfrac{\mu_0 i_0^2 c}{8\pi^2 r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \dfrac{\mu_0 i_0^2 c}{4\pi}\ln(\dfrac{b}{a})$.