Chapitre EM 9 : Ondes em dans le vide

Soit en un point de l'espace des charges et/ou des courants fonctions du temps. Ils créent en leur voisinage un champ électromagnétique variable. Ce champ électromagnétique variable est source d'un champ électromagnétique en son voisinage... et ainsi de proche en proche, le champ électromagnétique se propage. Il s'agit donc d'un phénomène ondulatoire.

I. **Equations de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$**

A savoir:

Soit le vecteur $\vec{A} = A_x\vec{e_x} + A_y\vec{e_y} + A_z\vec{e_z}$ où A_x, A_y, A_z sont des fonctions de x, y et z.

En coordonnées cartésiennes : on note $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$. On écrit alors:

$\overrightarrow{\text{grad}}V = \vec{\nabla} V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$

$div\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{B}$

$\Delta\vec{A} = \vec{\nabla}^2\vec{A} = \dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}$

On a aussi $div(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$. }B

Exemple : Calculer la divergence, le rotationnel et le laplacien de $\vec{E} = E_0\cos(\beta x)\sin(\omega t - ky)\vec{e_z}$.

$E_x = 0 \qquad E_y = 0 \qquad E_z = E_0\cos(\beta x)\sin(\omega t - ky)$

$div\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(E_0\cos(\beta x)\sin(\omega t - ky)\right) = 0$

$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}\right)\wedge\left(E_0\cos(\beta x)\sin(\omega t - ky)\vec{e_z}\right)$

$= E_0\dfrac{\partial}{\partial x}(\cos(\beta x))\sin(\omega t - ky)\,\vec{e_x}\wedge\vec{e_z} + E_0\cos(\beta x)\dfrac{\partial}{\partial y}(\sin(\omega t - ky))\,\vec{e_y}\wedge\vec{e_z}$

$= -\beta E_0\sin(\beta x)\sin(\omega t - ky)(-\vec{e_y}) + E_0(-k)\cos(\beta x)\cos(\omega t - ky)\vec{e_x}$

$\Delta\vec{E} = \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \cancel{\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}} = -\beta^2\vec{E} - k^2\vec{E}$

Equations de Maxwell en l'absence de charges et de courants : Vide : $\rho = 0$ $\vec{j} = \vec{0}$

Maxwell Gauss : $div\vec{E} = \dfrac{\cancel{\rho}}{\varepsilon_0} = 0$ — Maxwell Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Maxwell flux : $div\vec{B} = 0$ — Maxwell Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\cancel{\vec{j}} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Equation de propagation de $\overrightarrow{E}$: c'est l'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{E}$, on la trouve en utilisant $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(div\overrightarrow{E}) - \Delta\overrightarrow{E}$ et les équations de Maxwell.

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\overrightarrow{grad}(div\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \vec{0} - \Delta\vec{E}$$

d'où $\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$ ép. de d'Alembert avec $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

Equation de propagation de $\overrightarrow{B}$: c'est l'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{B}$, on la trouve en utilisant $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(div\overrightarrow{B}) - \Delta\overrightarrow{B}$ et les équations de Maxwell.

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\mu_0\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = -\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\overrightarrow{grad}(\cancel{div\,\vec{B}}) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$$

d'où $\boxed{\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$ ép. de d'Alembert avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon}}$

Remarques:

- On reconnaît des équations de type d'Alembert, la vitesse de propagation de l'onde est $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon}}$

- En coordonnées cartésiennes, l'équation de propagation vectorielle donne trois équations de propagation scalaire. L'équation vérifiée par E_x s'écrit: $\Delta E_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$

On note que E_y, E_z, B_x, B_y et B_z vérifient la même équation.

- En coordonnées sphériques avec pour variable spatiale unique r soit $E = E(r,t)$ et $B = B(r,t)$.

On donne le laplacien scalaire: $\Delta E = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rE)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial E}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 E}{\partial\phi^2}$

$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$ donne $\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rE)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$ soit après avoir × par r :

$\boxed{\frac{\partial^2(rE)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(rE)}{\partial t^2} = 0}$ $rE(r,t)$ vérifie une ép. de d'Alembert

⚠ $\frac{\partial(rE)}{\partial t} = r\frac{\partial E}{\partial t}$ $\quad \frac{\partial(rE)}{\partial r} \neq r\frac{\partial E}{\partial r}$

II. Solutions en OPPH

Notations : On propose une solution de la forme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM} + \phi)$: c'est une solution en OPPH de pulsation ω et de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ avec:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période temporelle

$\overrightarrow{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$ où λ est la période spatiale et $\vec{u}$ le vecteur unitaire dans le sens et la direction de propagation

P pour progressive : les variables t et $\overrightarrow{OM}$ sont dans le même terme appelé phase. $\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM}$

P pour plane : $\vec{k}$ est un vecteur fixe
dans tt plan ⊥ à la direction de propagation, l'amplitude de l'onde est la même en tout point

H pour harmonique (ou sinusoïdal)

avec $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$

Exemple pour $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{e_x}$, le champ électrique est de la forme: $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t - kx + \varphi)$

$\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} = \omega t - k\overrightarrow{e_x}\cdot(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}) = \omega t - kx$

Exemple pour $\overrightarrow{k} = -k\overrightarrow{e_y}$, le champ électrique est de la forme: $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t + ky + \varphi)$

$\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} = \omega t + k\overrightarrow{e_y}(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}) = \omega t + ky$

Exemple pour $\overrightarrow{k} = k\cos\alpha\overrightarrow{e_x} - k\sin\alpha\overrightarrow{e_z}$, le champ électrique est de la forme: $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t - k\cos\alpha\, x + k\sin\alpha\, y + \varphi)$

$\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} = \omega t - (k\cos\alpha\,\overrightarrow{e_x} - k\sin\alpha\,\overrightarrow{e_z})(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}) = \omega t - k\cos\alpha\, x + k\sin\alpha\, y$

Pour une OPPH, on utilise la notation complexe: $\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{E_0}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM})}$ $\boxed{\overrightarrow{E} = Re(\underline{\overrightarrow{E}})}$

L'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t}$ s'écrit $\times i\omega$ — $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ s'écrit $\times(i\omega)^2 = -\omega^2$

L'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ s'écrit $\times -i\vec{k}$ (c'est comme "$\dfrac{\partial}{\partial \overrightarrow{OM}}$") — div s'écrit $\overrightarrow{\nabla}. = -i\vec{k}.$

L'opérateur Δ s'écrit $\times(-i\vec{k})^2 = -k^2$ — $\overrightarrow{\text{rot}}$ s'écrit $\overrightarrow{\nabla}\wedge = -i\vec{k}\wedge$

$(\Delta = \overrightarrow{\nabla}^2)$

Relation de dispersion : c'est la relation entre k et ω, on l'obtient en injectant la solution proposée pour $\overrightarrow{E}$ (ou $\overrightarrow{B}$) dans l'équation de propagation.

$$\begin{cases} \Delta\underline{\overrightarrow{E}} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \underline{\overrightarrow{E}} = E_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM})} \end{cases}$$

avec $\Delta\underline{\overrightarrow{E}} = (-i\vec{k})^2\,\underline{\overrightarrow{E}} = -k^2\,\underline{\overrightarrow{E}}$

$\dfrac{\partial^2\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} = (i\omega)^2\,\underline{\overrightarrow{E}} = -\omega^2\,\underline{\overrightarrow{E}}$

soit $-k^2\underline{\overrightarrow{E}} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{\overrightarrow{E}} = \vec{0}$

d'où $\boxed{k = \dfrac{\omega}{c}}$

Vitesse de phase : elle est définie par $V_\phi = \dfrac{\omega}{k}$ où ω et k sont dans le même terme de phase.

$\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = c}$: lorsque v_φ est indépendante de ω on écrit : " il n'y a pas dispersion, cela signifie que les ondes de fréquences $\neq$ se propagent toutes à la même vitesse "

Structure du champ em :

div$\overrightarrow{E} = 0$ $(\rho = 0)$ d'où $\overrightarrow{\nabla}.\underline{\overrightarrow{E}} = 0$ soit $-i\vec{k}.\underline{\overrightarrow{E}} = 0$ donc $\vec{k} \perp \overrightarrow{E}$

$\overrightarrow{E}$ est $\perp$ à la direction de propagation : le champ électrique est dit transverse

div$\overrightarrow{B} = 0$ d'où $\overrightarrow{\nabla}.\underline{\overrightarrow{B}} = 0$ soit $-i\vec{k}.\underline{\overrightarrow{B}} = 0$ donc $\vec{k} \perp \overrightarrow{B}$

$\overrightarrow{B}$ $\perp$ à la direction de propagation : le champ magnétique est dit transverse

$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}}$ d'où $\overrightarrow{\nabla}\wedge\underline{\overrightarrow{E}} = -\dfrac{\partial\underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t}$ soit $-i\vec{k}\wedge\underline{\overrightarrow{E}} = -i\omega\underline{\overrightarrow{B}}$ d'où $\boxed{\underline{\overrightarrow{B}} = \dfrac{\vec{k}\wedge\underline{\overrightarrow{E}}}{\omega}} = \boxed{\dfrac{\vec{u}\wedge\underline{\overrightarrow{E}}}{c}}$ $\vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\vec{u}$

valable pour toutes les OPPH

valable pour les OPPH dans le vide

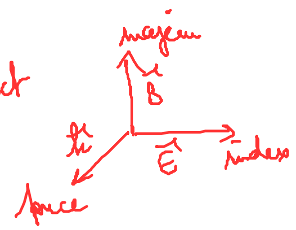
sert à trouver $\overrightarrow{B}$ quand on connaît $\overrightarrow{E}$

$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}}$ d'où $\overrightarrow{\nabla}\wedge\underline{\overrightarrow{B}} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t}$ soit $-i\vec{k}\wedge\underline{\overrightarrow{B}} = \dfrac{i\omega}{c^2}\underline{\overrightarrow{E}}$ d'où $\underline{\overrightarrow{E}} = -c^2\vec{k}\wedge\underline{\overrightarrow{B}} = -c\,\vec{u}\wedge\overrightarrow{B}$

sert à trouver $\overrightarrow{E}$ quand on connaît $\overrightarrow{B}$

Conclusion : $(\vec{k}, \overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ trièdre direct

main droite



$\|\overrightarrow{B}\| \times c = \|\overrightarrow{E}\|$

$\overrightarrow{B} = \dfrac{\vec{k}\wedge\overrightarrow{E}}{\omega}$

Dans les exemples suivants donner la direction de polarisation du champ électrique (c'est la direction de $\overrightarrow{E}$), la direction de propagation, les vecteurs $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{B}$.

$\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{e_z}\cos(\underbrace{\omega t - ky})$

phase : l'onde se propage selon $(+Oy)$

$\vec E$ plaisé selon (Oz)

$\vec k = \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{\text{vide}}\vec{e_y}$

$\vec{rot}\,\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}$ soit $\frac{\partial \vec B}{\partial t} = -\vec{rot}\,\vec E = -\vec\nabla \wedge \vec E$

$\frac{\partial \vec B}{\partial t} = -\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial x}}\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}}\vec{e_z}\right)\wedge E_0\vec{e_z}\cos(\omega t - ky)$

$= -E_0 k \sin(\omega t - ky)\,\vec{e_x}$

$\vec B = \frac{E_0 k}{\omega}\cos(\omega t - ky)\,\vec{e_x} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - ky)\,\vec{e_x}$

ou

$\vec B = \frac{\vec{e_y}\wedge\vec E}{c} = \frac{\vec{e_y}\wedge E_0\vec{e_z}\cos(\omega t - ky)}{c}$

$\vec B = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - ky)\,\vec{e_x}$

$\underline{\overrightarrow{E}} = -E_0\overrightarrow{e_y}e^{j\underbrace{(\omega t + kx)}}$

$\vec E$ plaisé selon (Oy)

phase : l'onde se propage selon $(-Ox)$

$\vec k = -\frac{\omega}{c}\vec{e_x}$

$\vec{rot}\,\underline{\vec E} = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}$ donc $\vec\nabla\wedge\underline{\vec E} = -\frac{\partial \underline{\vec B}}{\partial t}$

$+jk\vec{e_x}\wedge\underline{\vec E} = -j\omega\underline{\vec B}$

$\underline{\vec B} = -\frac{k\vec{e_x}\wedge(-E_0)\vec{e_y}e^{j(\omega t + kx)}}{\omega}$

$= \frac{E_0}{c}\vec{e_z}e^{j(\omega t + kx)}$

ou

$\underline{\vec B} = -\frac{\vec{e_x}\wedge\left(-E_0\vec{e_y}e^{j(\omega t + kx)}\right)}{c}$

$= \frac{E_0}{c}e^{j(\omega t + kx)}\vec{e_z}$

$\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{e_y}\cos(\underbrace{\omega t - kx})$

phase : l'onde se propage selon $(+Ox)$

$\vec k = \frac{\omega}{c}\vec{e_x}$

$\vec{rot}\,\vec B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec E}{\partial t} = \vec\nabla\wedge\vec B$

$\frac{\partial \vec E}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \cancel{\frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y}} + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}}\right)\wedge B_0\vec{e_y}\cos(\omega t - kx)$

$= c^2 B_0 k\sin(\omega t - kx)\,\vec{e_z}$

$\vec E = -\frac{c^2 B_0 k}{\omega}\cos(\omega t - kx)\,\vec{e_z} = -cB_0\cos(\omega t - kx)\,\vec{e_z}$

$\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{e_z}e^{j\underbrace{(ky + \omega t)}}$

phase : l'onde se propage selon $(-Oy)$

$\vec k = -\frac{\omega}{c}\vec{e_y}$

$\vec{rot}\,\underline{\vec B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{\vec E}}{\partial t} = \vec\nabla\wedge\underline{\vec B}$

$\frac{\partial \underline{\vec E}}{\partial t} = c^2\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial x}}\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}}\vec{e_z}\right)\wedge B_0\vec{e_z}e^{j(ky + \omega t)}$

$= c^2 B_0\, jk\, e^{j(ky + \omega t)}\,\vec{e_x}$

$\times\frac{1}{j\omega}$ $\underline{\vec E} = c^2 B_0\frac{k}{\omega}e^{j(ky + \omega t)}\,\vec{e_x} = cB_0 e^{j(ky + \omega t)}$

Remarque : si on adopte la notation $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM} - \omega t + \phi)$.

En notation complexe, on a $\underline{\overrightarrow{E}} = \vec{E_0}\,e^{j(\vec k.\vec{OM} - \omega t + \phi)}$ $\quad \vec E = Re(\underline{\vec E})$ B

L'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t}$ s'écrit $\times -j\omega$

L'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ s'écrit $\times(+j\vec k)$ (c'est comme "$\frac{\partial}{\partial \vec{OM}}$")

L'opérateur Δ s'écrit $\times(j\vec k)^2 = -k^2$

$\Delta = \vec\nabla^2$

$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ s'écrit $\times(-j\omega)^2 = -\omega^2$

div s'écrit $\vec\nabla . = j\vec k .$

$\overrightarrow{\text{rot}}$ s'écrit $\vec\nabla\wedge = j\vec k\wedge$

On trouve avec ces notations la même relation de dispersion et les mêmes résultats que précédemment.

Du point de vue énergétique, on rappelle les expressions de:

-la *Densité volumique d'énergie em*: $u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$

Sous entendu : $\vec{E} = \vec{E}(M,t)$
$\vec{B} = \vec{B}(M,t)$

- le *vecteur de Poynting:* $\overrightarrow{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{c}$

Pour une OPPH caractérisée par le champ électrique $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM})$, exprimer le plus simplement possible u_{em}, $< u_{em} >$, $\overrightarrow{R}$ et $< \overrightarrow{R} >$. On donne $\overrightarrow{A}\Lambda(\overrightarrow{C}\Lambda\overrightarrow{D}) = (\overrightarrow{A}.\overrightarrow{D}).\overrightarrow{C} - (\overrightarrow{A}.\overrightarrow{C}).\overrightarrow{D}$

pour une OPPH dans le vide : $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ et $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

⚠ $\langle \vec{R} \rangle$ est toujours dans le sens et la direction de propagation de l'onde

$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = 2 \times \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \varepsilon_0 E^2$ car $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$

$\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{OM}) \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$

$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})}{\mu_0 \omega} = \frac{(\vec{E}.\vec{E})\vec{k}}{\mu_0 \omega} - \cancel{\frac{(\vec{E}.\vec{k})\vec{E}}{\mu_0 \omega}} = \frac{\vec{k}}{\mu_0 \omega} E^2 = \frac{\vec{u} E^2}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}$

$\vec{E} \perp \vec{k}$ $\quad$ $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$ $\quad$ $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$

($\langle E^2 \rangle = E_0^2 \langle \cos^2 .. \rangle = E_0^2/2$)

$\langle \vec{R} \rangle = \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{2} \vec{u}$

Attention à la notation complexe: on ne peut pas utiliser la notation complexe pour déterminer les valeurs instantanées de $\overrightarrow{R}$ et de u_{em}.

Attention: pour les énergies, la notation complexe ne s'utilise que pour calculer des valeurs moyennes dans le temps en écrivant:

$$< \overrightarrow{R} >= \frac{1}{2}Re(\frac{\underline{\overrightarrow{E}}\Lambda\underline{\overrightarrow{B}}^*}{\mu_0}) \text{ et } < u_{em} >= \frac{\epsilon_0}{2}Re(\underline{\overrightarrow{E}}.\underline{\overrightarrow{E}}^*) + \frac{1}{2\mu_0}Re(\underline{\overrightarrow{B}}.\underline{\overrightarrow{B}}^*).$$

$\underline{E}^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{E}$, on le trouve en remplaçant j par $-j$ dans l'expression de $\underline{E}$.

Rappel: $e^{j(\omega t - kx)} = \cos(\omega t - kx) + j\sin(\omega t - kx)$

$e^{-j(\omega t - kx)} = \cos(\omega t - kx) - j\sin(\omega t - kx)$

$e^{j\theta} \times e^{-j\theta} = 1$

Exemple : soit l'onde de champ électrique $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\overrightarrow{e_x}e^{j(\omega t + kz)}$. Exprimer le champ magnétique $\underline{\overrightarrow{B}}$ associé, la valeur moyenne du vecteur de Poynting et la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique. Exprimer le champ électromagnétique en notation réelle et en déduire le vecteur de Poynting.

$\underline{\vec{E}} = E_0 \vec{e_x} e^{j(\omega t + kz)}$

phase : $\omega t + kz$: l'onde se propage selon $(-Oz)$ $\quad \vec{k} = \frac{\omega}{c}(-\vec{e_z})$

$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{-\vec{e_z} \wedge E_0 \vec{e_x} e^{j(\omega t + kz)}}{c} = -\frac{E_0}{c}\vec{e_y} e^{j(\omega t + kz)}$

$\langle \vec{R} \rangle = \langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{1}{2} Re\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2\mu_0} Re\left(E_0 \vec{e_x} e^{j(\omega t + kz)} \wedge \left(-\frac{E_0}{c}\vec{e_y}\right) e^{-j(\omega t + kz)}\right)$

$= \frac{-E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e_z}$ $\quad$ $\langle \vec{R} \rangle$ est dans la directo et le sens de propagation de l'onde

$\langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} Re(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{E}}^*) + \frac{1}{2\mu_0} Re(\underline{\vec{B}}.\underline{\vec{B}}^*) = \frac{\varepsilon_0}{2} Re(E_0^2 e^{j..} \times e^{-j..}) + \frac{1}{2\mu_0} Re\left(\frac{E_0^2}{c^2} e^{j..} \times e^{-j..}\right)$

$\vec{E} = Re(\underline{\vec{E}}) = E_0 \vec{e_x} \cos(\omega t + kz)$

$\vec{B} = Re(\underline{\vec{B}}) = -\frac{E_0}{c}\vec{e_y} \cos(\omega t + kz)$

$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{-E_0^2}{\mu_0 c}\vec{e_z} \cos^2(\omega t + kz)$

III. **Quand les ondes ne sont pas des OPPH**

1. *Généralisation aux ondes non harmoniques* : les OPPH n'ont pas de réalité physique:

- les sources qui émettent de façon isotrope dans toutes les directions de l'espace émettent des ondes sphériques, le laser émet une onde gaussienne. Cela remet en cause l'hypothèse onde plane

- les sources émettent dans un certain domaine de longueur d'onde $\Delta\lambda = c\tau$ où τ est la durée d'émission d'un train d'onde. Cela remet en cause l'hypothèse onde harmonique

Les OPPH présentent tout de même un intérêt, en effet une onde non harmonique de direction de propagation $\overrightarrow{u}$ peut se décomposer en somme d'ondes planes harmoniques de pulsation ω différentes et de longueurs d'onde λ différentes : cela résulte du **théorème de superposition que l'on peut appliquer grâce à la linéarité des équations de Maxwell**.

2. Des exemples d'onde qui ne sont pas des OPPH

Exemple 1: soit une onde dont le champ électrique est donné par : $\overrightarrow{E} = E_0\cos(\omega t)\sin(ky)\overrightarrow{e_x}$

Nature de l'onde: t et y ne sont pas dans le même terme
c'est une onde stationnaire

Le champ magnétique associé s'écrit: $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\vec{e_x}} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}}\right)\wedge E_0\cos(\omega t)\sin(ky)\vec{e_x}$$

$$= -E_0\cos(\omega t)\,k\cos(ky)\,\vec{e_y}\wedge\vec{e_x} = kE_0\cos(\omega t)\cos(ky)\,\vec{e_z}$$

$$\vec{B} = \frac{E_0 k}{\omega}\sin(\omega t)\cos(ky)\,\vec{e_z} = \frac{E_0}{c}\sin(\omega t)\cos(ky)\,\vec{e_z}$$

les noeuds de $\vec{E}$ ($\sin(ky)=0$) sont les ventres de $\vec{B}$ ($\cos(ky)=\pm 1$)

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est: $\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos(ky)\sin(ky)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\underbrace{\vec{e_x}\wedge\vec{e_z}}_{-\vec{e_y}}$

$\langle\cos(\omega t)\sin(\omega t)\rangle = 0$ donc $\boxed{\langle\vec{R}\rangle = \vec{0}}$

pour une onde stationnaire, l'énergie ne se propage pas

Exemple 2: soit une onde dont le champ électrique est donné par : $\overrightarrow{E} = E_0\sin(\beta z)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y}$

Nature de l'onde: phase : $\omega t - kx$: l'onde se propage selon $(+Ox)$
t et z ne sont pas dans le même terme donc l'onde est stationnaire selon (Oz)
plane ? $\vec{k}$ selon $\vec{e_x}$: le vecteur d'onde est fixe
dans les plans $x = $ cste (plans $\perp$ à la direction de propagation)
l'amplitude n'est pas la même en tout point ($\sin(\beta z)$)
donc cette onde n'est pas plane

Le champ magnétique associé se déduit de: $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E}$