Chapitre EM 10 : absorption-dispersion

Lorsque l'on néglige les phénomènes dissipatifs (force de viscosité dans les fluides, frottements sur une corde,...), l'équation de propagation est de type d'Alembert de la forme:

La relation de dispersion s'écrit alors:

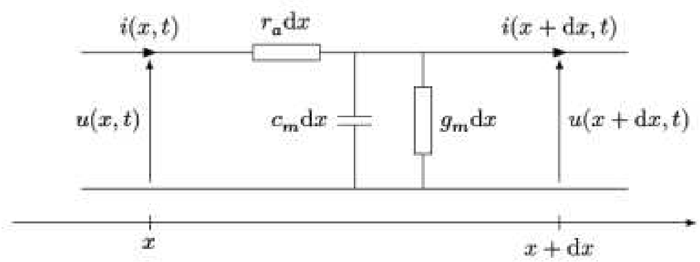
Ce chapitre aborde le cas des ondes mécaniques en présence de phénomènes dissipatifs ou d'ondes électromagnétiques se propageant dans un milieu matériel tel que l'onde interagit avec les particules chargées de ce milieu. Dans ces milieux, l'équation de propagation n'est pas une équation de d'Alembert.

I. **Absorption**

L'absorption se manifeste lorsque l'équation de propagation n'est pas une équation de d'Alembert et qu'elle présente des dérivées partielles d'ordre impair qui traduisent la présence de phénomènes ....
Dans ce cas la relation de dispersion donne un vecteur d'onde qui est un nombre complexe.

1. *Exemple 1*

L'axone, ou fibre nerveuse, est le prolongement du neurone qui conduit les signaux électriques émis par le centre du neurone (potentiel d'action) vers les synapses. Les axones les plus simples sont formés d'une membrane lipidique enfermant un liquide physiologique riche en ions (l'axoplasme) et baignant dans un liquide cellulaire également riche en ions. Les propriétés conductrices de l'axone sont déterminées par:



r_a, g_m et c_m désignent respectivement la résistance linéïque, la conductance linéïque et la capacité linéïque de l'axone.

Déterminer l' équation de propagation vérifiée par $u(x,t)$ et en déduire la relation de dispersion pour une solution sous la forme d'une OPPH de la forme $\underline{u}(x,t) = u_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$.

2. *Exemple 2*

On étudie une onde qui se propage dans un métal de conductivité γ et tel qu'en tout point la densité volumique de charges est nulle. On rappelle $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{grad}(div\overrightarrow{E}) - \Delta\overrightarrow{E}$. Etablir l'équation de propagation de l'onde et en déduire la relation de dispersion un onde em de la forme $\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{E_0}e^{i(\omega t - kx)}$.

3. *Recherche du vecteur d'onde* $\underline{k}$

L'équation de propagation conduit, pour une onde de la forme $\underline{y}(x,t) = y_0 e^{i(\omega t - kx)}$, à une relation de dispersion donnant l'expression de $\underline{k}^2$ (qui vient du terme ....) en fonction de ω. On doit ensuite en déduire l'expression de $\underline{k}$. On rencontre plusieurs cas suivant les situations.

Cas 1: $\underline{k}^2$ est un réel positif:

Cas 2: $\underline{k}^2$ est un réel négatif:

Cas 3: $\underline{k}^2$ est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est négative:

Cas 4: les parties réelle et imaginaire de $\underline{k}^2$ ne sont pas nulles. Le calcul de l'expression de $\underline{k}$ est alors compliqué.

Soit l'énoncé demande de comparer les valeurs numériques de la partie réelle et de la partie imaginaire et de ne garder qu'un seul terme, le plus grand en valeur absolue. On se ramène alors à une des trois situations évoquées ci-dessus.

Soit l'énoncé demande de poser $\underline{k} = k_1 + ik_2$.

4. *Conclusion*

La partie réelle de $\underline{k}$ traduit

On en déduit la vitesse de phase par $v_\phi = \dfrac{\omega}{\mathcal{R}e(\underline{k})}$

La partie imaginaire de $\underline{k}$ traduit

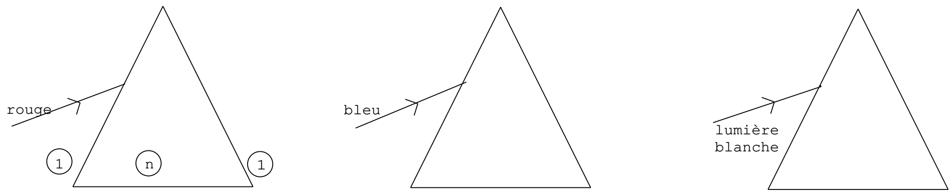
La distance caractéristique de pénétration de l'onde dans un milieu est

II. **Dispersion**

1. *Définition et exemples:*

Un milieu ou un système est dit dispersif si les ondes de fréquences différentes n'ont pas la même vitesse.

Exemple 1: le verre est un milieu dispersif (l'indice du verre dépend de la longueur d'onde, on donne la loi de Cauchy : $n = n_1 + \dfrac{n_2}{\lambda^2}$).



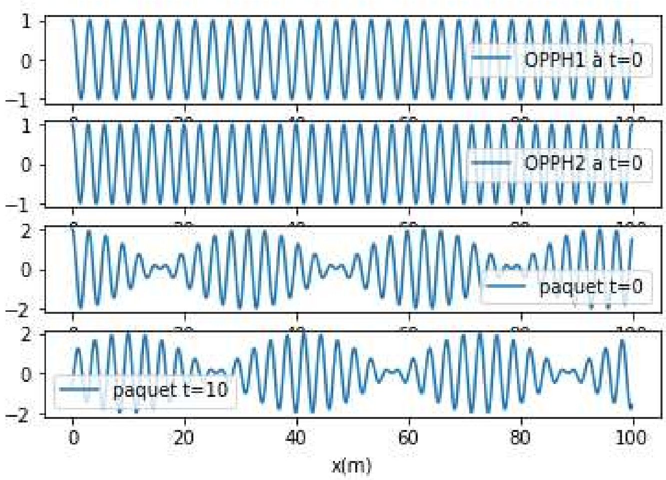
Exemple 2: le réseau:

L'effet d'un milieu dispersif ne peut s'observer que si l'on fait propager dans ce milieu des ondes de différentes fréquences.

2. *Notion de paquet d'ondes*

Une OPPH n'a pas de réalité physique, les sources émettent des trains d'onde, soit des ondes limitées dans le temps et dans l'espace. Un train d'onde (ou paquet d'onde) peut se modéliser par la superposition de plusieurs OPPH de fréquences différentes.

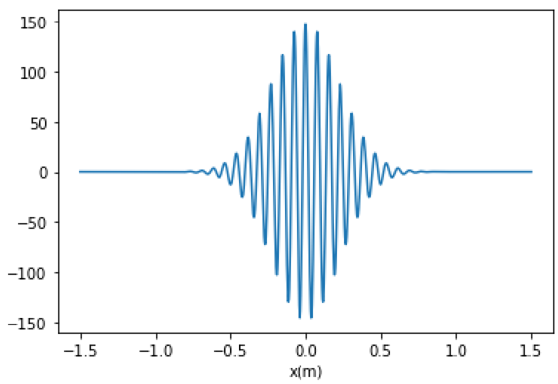
Exemple 1 : le paquet d'ondes le plus simple est composé de la superposition de deux OPPH de fréquences différentes:

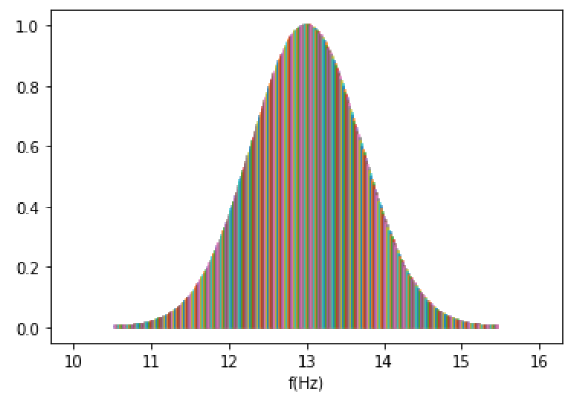


Exemple 2: le paquet d'onde gaussien:

```
def paquet(fmin,fmax,x,t):
——s,N=0,500
——c=1
——for i in range(N):
————-f0=(fmax+fmin)/2
————-Df=(fmax-fmin)
————-f=fmin+i*Df/N
————-w=2*np.pi*f
————-k=w/c
————-g=np.exp(-(f-f0)**2)
————-s=s+g*np.cos(w*t-k*x)
——return s
x=np.linspace(....., .....,1000)
plt.plot(x,paquet(.....,.....,.....,0))
plt.show()
```

On visualise le paquet d'ondes et le spectre pour :





3. *Vitesse de phase et vitesse de groupe*

Un paquet d'ondes est composé d'une enveloppe et d'oscillations à l'intérieur de cette enveloppe.

On définit deux vitesses pour la propagation de ce paquet d'onde:

- La vitesse de phase : c'est la vitesse de propagation d'une OPPH de pulsation ω. On l'appelle vitesse de phase, car c'est la phase qui traduit la propagation d'une onde et cette propagation est contenue dans la partie réelle du vecteur d'onde.

La vitesse de phase est donc définie par $v_\phi = \dfrac{\omega}{\mathcal{R}e(\underline{k})}$.

Remarque 1 :une OPPH n'a pas de réalité physique car les ondes monochromatiques (une seule fréquence) n'existent pas. Donc la vitesse de phase n'est pas une vitesse matérielle, elle peut donc être supérieure à c.

Remarque 2 : pour une OPPH on a $\lambda = v_\phi T$.

- La vitesse de groupe : elle correspond à la vitesse de propagation de l'énergie soit à la vitesse de propagation de l'enveloppe du signal ou encore vitesse de propagation de l'information, c'est elle qui a une réalité matérielle et physique. Elle est donc inférieure à c.

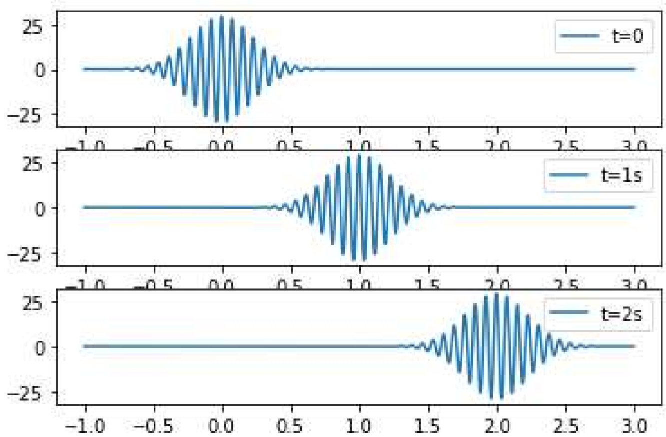
On la calcule en appliquant $v_g = \dfrac{d\omega}{dk'}$ où $k' = \mathcal{R}e(\underline{k})$.

Dans un milieu dispersif, v_ϕ et v_g sont différentes et ces vitesses dépendent de ω.

Dans un milieu non dispersif, v_ϕ et v_g sont égales et ces vitesses ne dépendent pas de ω.

4. *Propagation d'un paquet d'ondes*

Exemple de propagation dans un milieu non dispersif: le paquet d'onde gaussien avec $f_{min} = 10\ Hz$ et $f_{max} = 16\ Hz$ se propage dans un milieu où la relation de dispersion est $k = \dfrac{\omega}{c}$.



Exemple de propagation dans un milieu dispersif: le paquet d'onde gaussien avec $f_{min} = 10\ Hz$ et $f_{max} = 16\ Hz$ se propage dans un milieu où la relation de dispersion est $k = \sqrt{\omega}$