TD absorption-dispersion

I. **Visualisation du phénomène d'absorption**

On étudie une onde représentée en notation complexe par $\underline{y}(x,t) = y_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ avec $\underline{k} = k_r + ik_i$.

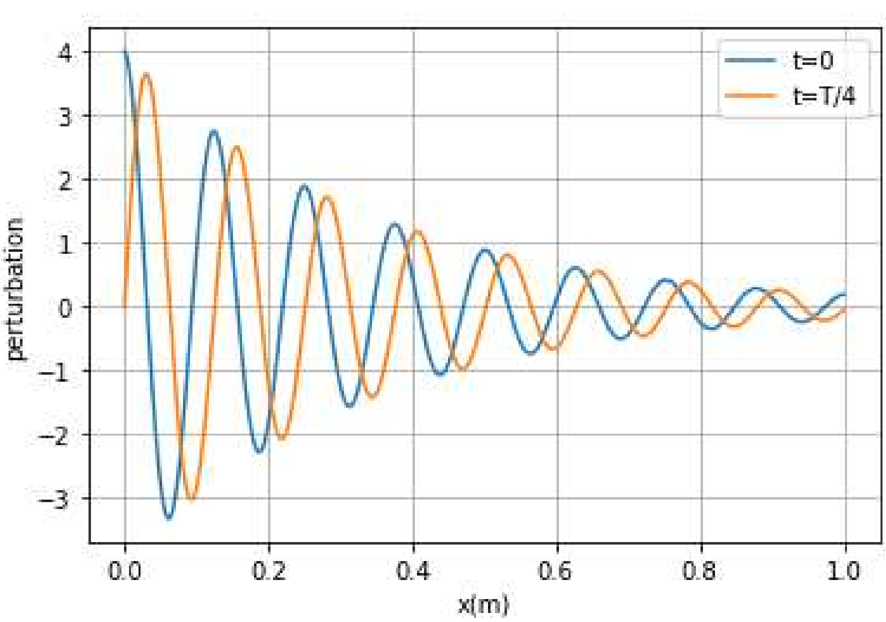
1. Exprimer $y(x,t)$ en notation réelle.

2. On écrit le code suivant pour tracer les fonctions $y(x, t = 0)$ et $y(x, t = T/4)$.

```
1 w=5 # désigne la pulsation
2 T=......................... # désigne la période
3 ld=........................ # désigne la longueur d'onde
4 kr,ki=.........,........................ # désignent les parties réelle et imaginaire de k
5 y0=............................ # amplitude maximale de y(x,t)
5 def y(x,t):
6 ——return .....*np.exp(...........)*np.cos(............................)
7 x=np.linspace(......,.......,1000)
8 plt.plot(x,y(x,.......),label='.........')
9 plt.plot(x,y(x,......),label='.........')
10 plt.xlabel('x(m)')
11 plt.ylabel('perturbation')
12 plt.grid()
13 plt.legend()
14 plt.show()
```

2.a. Compléter les lignes 2 et 6.

2.b. On obtient les courbes suivantes:



Déduire des courbes les valeurs numériques pour compléter les lignes 3, 4, 5, 8 et 9.

Nommer le phénomène que l'on observe sur ces courbes.

II. **Propagation dans un conducteur ohmique**

On considère une onde em décrite par $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{e_x}e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$ se propageant dans un conducteur ohmique de conductivité γ. Données : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H/m$ et $\gamma = 10^8\ S/m$ pour le cuivre, $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}\ F.m^{-1}$.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par ρ et la résoudre. En déduire le domaine de fréquences dans lequel un conducteur ohmique est considéré comme globalement neutre.

2. Etablir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique. En déduire la relation de dispersion.

3. Dans le domaine de fréquences correspondant au visible, montrer que la relation de dispersion peut s'écrire $k^2 = -i\mu_0\gamma\omega$. Préciser le terme que cela revient à négliger dans l'équation de Maxwell Ampère. En déduire l'expression de $\underline{k}$ puis l'expression du champ électrique en notation réelle. Montrer que la propagation de l'onde dans le métal s'accompagne d'une atténuation. Proposer la définition d'une distance caractéristique nommée épaisseur de peau.

4. Calculer l'épaisseur de peau dans le cuivre pour les ondes dans le domaine visible.

5. Donner la méthode pour exprimer le champ magnétique de l'onde.

III. **Conductivité d'un métal**

Dans un conducteur métallique, les électrons libres de masse m, de charge $-e$ et de densité volumique n, ont pour vitesse d'ensemble $\overrightarrow{v}$ en présence d'un champ électrique. Ils sont soumis de la part du réseau cristallin à la force de frottement du type $-\dfrac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$.

1. Donner l'origine de cette force, préciser l'unité de τ et en déduire son sens physique.

2. Le métal est le siège d'une onde em de champ électrique $\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{E_0}e^{i(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM}-\omega t)}$. Appliquer la RFD à un électron et justifier que l'on peut négliger son poids et la force magnétique devant la force électrique. En déduire l'expression de la conductivité du métal $\underline{\gamma}$ en fonction de $\gamma_0 = \dfrac{ne^2\tau}{m}$, ω et τ. Que représente γ_0?

Données : $m = 0,9.10^{-30}\ kg$, $e = 1,6.10^{-19}\ C$, pour le cuivre : $\gamma_0 = 0,6.10^8\ S/m$ et $n = 10^{29}\ m^{-3}$. Calculer τ.

3. On étudie la propagation d'ondes em de fréquence $f = 20\ kHz$.

3.a. Pour de telles fréquences, simplifier l'expression de $\underline{\gamma}$ et simplifier l'équation de Maxwell-Ampère.

3.b. En déduire que l'équation de propagation du champ électrique est une équation de la forme $\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} = D\Delta\overrightarrow{E}$. Exprimer D en fonction des données et commenter l'équation trouvée.

3.c. Par analyse dimensionnelle en déduire δ la distance d'amortissement de l'onde de fréquence $f = 20\ kHz$ dans ce métal. Donnée : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$ et $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$, célérité des ondes dans le vide. Conclure.

Réponses : $\underline{\gamma} = \dfrac{\gamma_0}{1 - i\omega\tau}$, $\tau = 2,1.10^{-14}\ s$, $\underline{\gamma} \approx \gamma_0$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} \approx \mu_0\gamma_0\overrightarrow{E}$, $\Delta\overrightarrow{E} = \mu_0\gamma_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$ *et* $\delta = \sqrt{\dfrac{1}{\mu_0\gamma_0 f}}$

IV. **Propagation dans un plasma sans collision**

Un plasma est constitué de charges libres: de cations de charge $+Ze$, de masse m_c et de densité volumique n_c et d' électrons de charge $-e$, de masse m_e et de densité volumique n_e. Pour un plasma peu dense comme l'ionosphère ($n_e = 10^{11}\ m^{-3}$ contrairement à $n_e = 10^{29}\ m^{-3}$ dans un métal), on ne tient pas compte des collisions entre les charges. Données : $m_e = 9.10^{-31}\ kg$, $e = 1,6.10^{-19}\ C$, $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}\ F.m^{-1}$.

Le plasma est soumis à un champ em de le forme $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\overrightarrow{e_y}e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ où $\underline{k}$ est a priori complexe.

1. Le plasma est localement neutre, en déduire la relation entre n_e, n_c, e et Z.

2. Montrer que la partie magnétique de la force de Lorentz est négligeable devant la force électrique.

3. Appliquer la RFD à un électron et en déduire en présence de l'onde $\underline{\overrightarrow{v_e}}$, la vitesse d'un électron. En déduire également $\underline{\overrightarrow{v_c}}$, la vitesse d'un cation. Exprimer $\underline{\overrightarrow{j}}$ puis $\underline{\gamma}$ en fonction des données en précisant pourquoi on peut, dans ces expressions négliger la contribution des cations.

4. Exprimer la puissance volumique moyenne cédée par le champ em au plasma. Commenter.

Rappel : $< \overrightarrow{U}.\overrightarrow{V} >= \dfrac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{\overrightarrow{U}}.\underline{\overrightarrow{V}}^*)$.

5. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par $\overrightarrow{E}$.

6. Ecrire la relation de dispersion la mettre sous la forme $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. Exprimer ω_p et montrer que la propagation n'est possible que pour certaines valeurs de ω à préciser.

7. Lorsque la propagation est possible, caractériser l'onde obtenue, déterminer l'indice du milieu et exprimer les vitesses de phase et de groupe. Tracer les courbes donnant V_ϕ et V_g en fonction de ω et conclure.

8. Calculer pour l'ionosphère, les fréquences pour lesquelles les ondes ne se propagent pas. Discuter de la propagation des ondes radio grandes ondes (de fréquences voisines de 150 kHz) et des ondes de communication sol-satellite (de fréquences voisines de 15 GHz).

V. **Plasma avec collisions**

Un plasma est constitué par des charges libres, ions positifs (charge $+Ze$) et électrons (charge $-e$), il est localement neutre. On note n la densité volumique d'électrons et m la masse d'un électron. La masse M des cations étant très grande devant celles des électrons, on les suppose immobiles. On note τ, la durée moyenne entre deux chocs subis par un électron. Il en résulte une force de la forme $\overrightarrow{F} = -\dfrac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse d'un électron dans le référentiel d'étude.

Le plasma est soumis à un champ em de le forme $\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{E_0}e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM})}$ et $\underline{\overrightarrow{B}} = \overrightarrow{B_0}e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM})}$.

1. On néglige la force magnétique de la force de Lorentz, devant la force électrique. Justifier cette hypothèse.

2. Appliquer la RFD à un électron, en déduire $\underline{\overrightarrow{v}}$, $\underline{\overrightarrow{j}}$ puis $\underline{\gamma}$. Exprimer $\underline{\gamma}$ sous la forme $\underline{\gamma} = \dfrac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$. Exprimer γ_0 en fonction de n, e, m et τ.

3. Calculer γ_0 pour $\tau = 10^{-12}\ s$, $n = 10^{20}\ m^{-3}$, $-e = -1,6.10^{-19}\ C$, $m = 9,1.10^{-31}\ kg$. Montrer que $\underline{\gamma}$ est voisin de $\dfrac{\gamma_0}{i\omega\tau}$ pour les ondes lumineuses dans le domaine visible.

4. **4.a.** On choisit une onde em se propageant selon Ox avec un champ électrique polarisé rectilignement selon Oz. Exprimer $\underline{\overrightarrow{E}}$ en notation complexe.

4.b. Ecrire l'équation de propagation du champ em et en déduire la relation de dispersion sous la forme $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}$. Exprimer et calculer ω_P, appelée la pulsation plasma.

4.c. Donner la condition sur ω pour qu'il y ait propagation dans un tel milieu. Vérifier que les ondes lumineuses dans le visible peuvent se propager dans ce plasma.

Réponses: $\underline{\overrightarrow{v}} = \dfrac{\frac{-e\tau}{m}}{1 + i\omega\tau}\underline{\overrightarrow{E}}$, $\gamma_0 = \dfrac{ne^2\tau}{m}$, $\Delta\overrightarrow{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} - \mu_0\underline{\gamma}\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$, $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\epsilon_0}} = 5,6.10^{11}\ rad.s^{-1}$

VI. **Effet cave**

Soit Oz l'axe vertical descendant. La surface de la Terre se trouve en $z = 0$, l'air occupe l'espace $z < 0$ et la terre occupe l'espace $z > 0$. Les caractéristiques physiques du sol sont: sa masse volumique $\rho = 3000\ kg.m^{-3}$,sa capacité thermique massique $c = 515\ J.kg^{-1}.K^{-1}$ et sa conductivité thermique $\lambda = 1\ W.K^{-1}.m^{-1}$.

La température de surface est imposée et a pour expression :$T(z = 0, t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$ traduisant les variations de la température au cours des saisons.

1. Déterminer T_0, θ_0 et la fréquence f, sachant que la température de surface est minimale le premier janvier et vaut $T_{min} = -10^0C$ et est maximale le premier juillet et vaut $T_{max} = 30^0C$.

2. La température dans le sol ne dépend spatialement que de z, on la met sous la forme $T(z, t)$ vérifiant l'équation de diffusion $\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$. Déduire d'une analyse dimensionnelle l'expression de D en fonction de c, λ et ρ.

3. On pose $T(z, t) = T_0 + \theta(z, t)$. En notation complexe $\underline{\theta}(z, t) = \underline{F}(z)e^{i\omega t}$. Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit $\underline{F}(z)$. Résoudre cette équation et en déduire $\theta(z, t)$ puis $T(z, t)$. Exprimer la longueur caractéristique de diffusion δ.

4. On se place dans une cave à une profondeur $h = 2\ m$ soit $z = -2\ m$. Quelle est l'amplitude de variation de température à cette profondeur ? Pourquoi parle-t-on d'effet cave ou troglodyte ?

Réponses: 1- $T_0 = 10^0C$ *et* $\theta_0 = 20^0C$ *2-* $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ *3-* $\underline{F}''(z) - \frac{i\omega}{D}\underline{F}(z) = 0$ $\underline{\theta}(z, t) = \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}\cos(\omega t - z\sqrt{\frac{\omega}{2D}})$, $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$

VII. **Corde vibrante dans un fluide visqueux**

On considère une corde horizontale de longueur L, de masse linéique μ uniforme, et de tension T_0. On note $y(x, t)$ la vibration transversale et $\alpha(x, t)$ l'angle que fait la tangente à la corde par rapport à l'horizontale au point M d'abscisse x à l'instant t. L'axe Oy est vertical ascendant.

On fait l'hypothèse que les mouvements sont de faible amplitude donc les angles $\alpha(x, t)$ sont petits et que les points sur la corde ont un mouvement vertical.

On note $\overrightarrow{T_d}(x, t)$ la force exercée en x à l'instant t par le bout de corde à droite de x.

On note $\overrightarrow{T_g}(x, t)$ la force exercée en x à l'instant t par le bout de corde à gauche de x.

La portion de corde comprise entre x et $x + dx$ à l'instant t, subit la force $-hdx\overrightarrow{v}(x, t)$ où $\overrightarrow{v}(x, t)$ est la vitesse de l'élément de corde à l'abscisse x à l'instant t et h une constante positive. On néglige le poids et la raideur de la corde.

1. Préciser l'unité de h.

2. Montrer que la tension de la corde est constante.

3. Exprimer $\alpha(x, t)$ en fonction d'une dérivée partielle de $y(x, t)$.

4. Montrer que l'équation de propagation s'écrit: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{h}{T_0}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$

5. On cherche les solutions de la forme $\underline{y}(x, t) = y_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$. En déduire l'expression de $\underline{k}^2$.

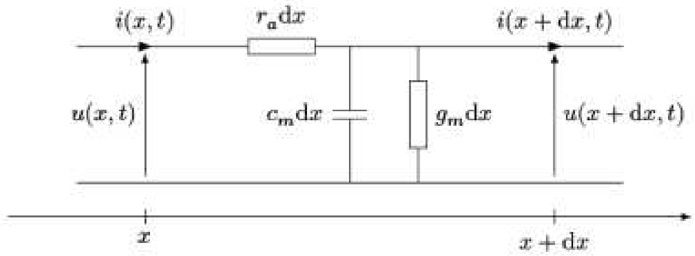
6. On se place dans le cas où les frottements sont très importants soit $h >> \mu\omega$. Simplifier l'expression de $\underline{k}^2$, en déduire l'expression de $\underline{k}$ et l'expression de $y(t)$. Commenter le résultat.

7. Exprimer la vitesse de phase. Conclure.

Réponses : 1- $[h] = kg.m^{-1}.s^{-1}$ *5-* $\underline{k} = \sqrt{\frac{\omega h}{2T_0}}(1 - i)$ *6-* $y(t) = y_0 e^{-x/\delta}\cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$ *avec* $\delta = \sqrt{\frac{2T_0}{h\omega}}$ *7-* $v_\phi = \sqrt{\frac{2T_0\omega}{h}}$

VIII. **Axone**

L'axone, ou fibre nerveuse, est le prolongement du neurone qui conduit les signaux électriques émis par le centre du neurone (potentiel d'action) vers les synapses. Les axones les plus simples sont formés d'une membrane lipidique enfermant un liquide physiologique riche en ions (l'axoplasme) et baignant dans un liquide cellulaire également riche en ions. Les propriétés conductrices de l'axone sont déterminées par:



- La resistance linéique de l'axoplasme ($r_a = 6,4.10^9\ \Omega.m^{-1}$) s'opposant au passage du courant le long de l'axone

- la conductance lineique de la membrane ($g_m = 63\ mS.m^{-1}$) déterminant la fuite du courant

- la capacite de la membrane ($c_m = 0,32\ \mu F.m^{-1}$) capable d'emmagasiner des charges électriques à l'intérieur et à l'extérieur de la membrane.

Chaque portion élémentaire de longueur dx de la fibre nerveuse est modelisée par une cellule représentée sur le schéma.

1. Déduire de la loi des noeuds et de la loi des mailles les équations différentielles vérifiées par $i(x,t)$ et $u(x,t)$ au premier ordre en dx.

2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ appelée équation de propagation.

On cherche une solution sous la forme d'une OPPH de la forme $\underline{u}(x,t) = u_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$.

3. Montrer que si ω est très supérieure à une pulsation $\omega_c = \frac{g_m}{c_m}$ l'équation différentielle se simplifie en:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r_a c_m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On suppose que cette condition est vérifiée par la suite.

4. Quel est le phénomène décrit par cette équation ? Citer d'autres exemples analogues.

5. Exprimer $\underline{k}$ et en déduire l'expression de $u(x,t)$ en fonction de $\delta = \sqrt{\frac{2}{r_a c_m \omega}}$. Commenter.

6. Exprimer la vitesse phase. Conclure.

Réponses: 1- $\frac{\partial i}{\partial x} = -g_m u - c_m \frac{\partial u}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial u}{\partial x} = -r_a i$ *2-* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r_a g_m u - r_a c_m \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ *5-* $u(x,t) = u_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$ *6-* $v_\phi = \sqrt{\frac{2\omega}{r_a c_m}}$