DS 7 de physique

I. Correction: diapason (d'après E3A MP 2022)

1. Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, la masselotte subit son poids, la réaction normale du support, la force de rappel élastique $\overrightarrow{F_r} = -k(l - l_0)\overrightarrow{e_z} = -kz\overrightarrow{e_z}$ et la force de frottements $\overrightarrow{f} = -\lambda\dot{z}\overrightarrow{e_z}$.

La RFD projetée sur l'axe Oz donne: $m\ddot{z} = -kz - \lambda\dot{z}$ soit l'équation différentielle $\ddot{z} + \dfrac{\lambda}{m}\dot{z} + \dfrac{k}{m}z = 0$.

Par identification avec l'énoncé on a $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\lambda}{m}$ soit $Q = \dfrac{m\omega_0}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{km}}{\lambda}$ (plus il y a de frottements et plus le facteur de qualité est petit).

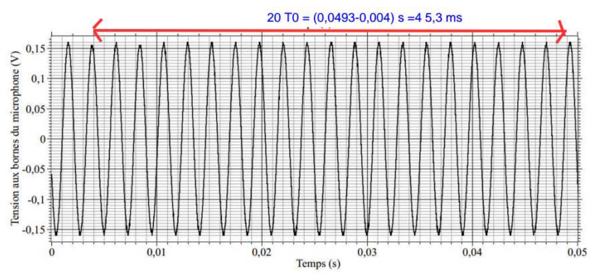
2. Pour résoudre cette équation on écrit l'équation caractéristique: $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ et son discriminent $\Delta = (\dfrac{\omega_0}{Q})^2 - 4\omega_0^2 < 0$ car l'énoncé nous dit que l'on observe un régime pseudo-périodique.

Les solutions sont complexes et s'écrivent $r_\pm = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

D'où la solution de l'équation différentielle $z(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$ avec $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$.

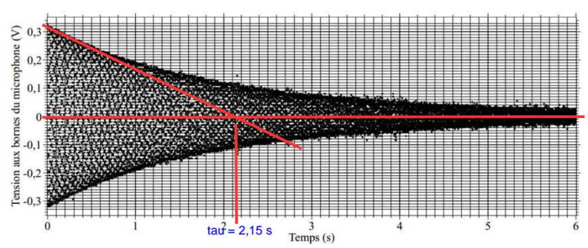
3. J'utilise le second enregistrement pour mesurer la période des oscillations (ici la pseudo-période est confondue avec la période propre car les frottements sont très faibles, le système oscilla très longtemps).

On a $20T_0 = 45,3\ ms$ soit $T_0 = 3,23\ ms$ et la fréquence est $f_0 = \dfrac{1}{T_0} = 441\ Hz$.



J'utilise le premier enregistrement pour mesurer le temps de relaxation τ.

Le temps de relaxation correspond à l'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote à la courbe soit $\tau = 2,15\ s$. Ce temps dans l'expression de $z(t)$ se trouve dans l'exponentielle qui est de la forme $e^{-t/\tau} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ soit $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0} = \dfrac{Q}{\pi f_0}$. Le facteur de qualité est donc $Q = \pi f_0 \tau = 2980$: c'est énorme. Ce qui correspond bien à ce que l'on observe, le système oscille très longtemps avant de s'annuler, il y a très très peu de frottements.

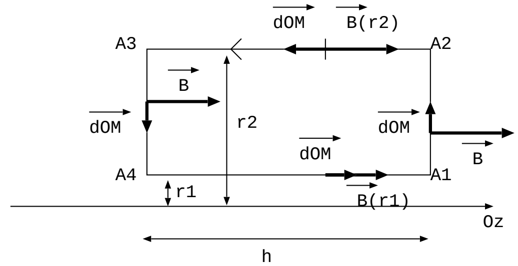


4. Le plan passant par M et perpendiculaire à Oz est un plan de symétrie donc le champ magnétique en M est perpendiculaire à ce plan soit $\overrightarrow{B}(M)$ est selon Oz.

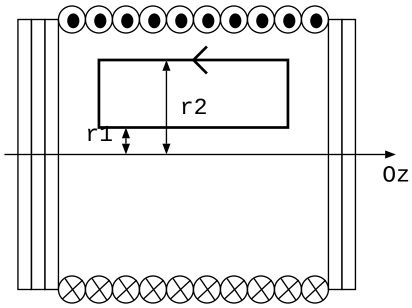
On repère le point M par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z), il y a invariance par rotation autour de Oz donc $\overrightarrow{B}$ ne dépend pas de θ et invariance par translation selon Oz donc $\overrightarrow{B}$ ne dépend pas de z.

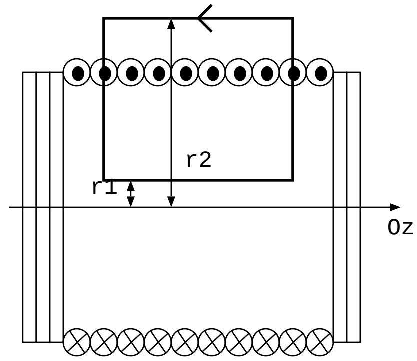
On a donc $\overrightarrow{B} = B(r)\overrightarrow{U_z}$.

5. Les lignes de champ magnétique sont des droites parallèle à Oz, on prend pour contour d'Ampère un rectangle dans un plan contenant Oz compris entre r_1 et $r_2 > r_1$ et de largeur h.



On calcule la circulation de $\overrightarrow{B}$ sur ce rectangle: $C = \int \overrightarrow{B}(M).d\overrightarrow{OM} = \int_{A_2}^{A_3} B(r_2)\overrightarrow{U_z}.dl(-\overrightarrow{U_z}) + \int_{A_4}^{A_1} \overrightarrow{B}(r_1)\overrightarrow{U_z}.dl(\overrightarrow{U_z}) = (B(r_1) - B(r_2))h$.





On choisit dans un premier temps $r_1 < r_2 < R$: le contour n'enlace aucun courant donc d'après le théorème d'Ampère $C = \mu_0 I_{enlaces} = 0$ soit $B(r_1) = B(r_2)$: le champ magnétique est uniforme dans le solénoide.

On choisit ensuite le cas où $r_1 < R < r_2$: d'après le théorème d'Ampère on a $C = (B(r_1) - B(r_2))h = \mu_0 nhI$ avec $B(r_2) = 0$ (champ nul à l'extérieur) et $B(r_1) = B_{int}$ (champ uniforme à l'intérieur) donc $B_{int} = \mu_0 nI$.

6. AN: $B_0 = \mu_0 nI = 0,12\ mT$. Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de qqs 10 μT.

7. L'approximation du solénoide infini permet d'avoir le champ dans une direction et qui dépend d'une variable pour pouvoir appliquer simplement le théorème d'Ampère. Cette condition est vérifiée lorsque le rayon du solénoide est petit devant sa longueur.

8. Le plan $(M, \overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_z})$ est un plan d'antisymétrie donc le champ électrique en M lui est perpendiculaire soit $\overrightarrow{E}$ est selon $\overrightarrow{U_\theta}$.

Il y a invariance par rotation autour de Oz donc $\overrightarrow{E}$ ne dépend pas de θ et invariance par translation selon Oz donc $\overrightarrow{E}$ ne dépend pas de z.

On a donc $\overrightarrow{E} = E(r,t)\overrightarrow{U_\theta}$.

9. On applique l'équation de Maxwell-Faraday avec $\overrightarrow{E} = E(r,t)\overrightarrow{U_\theta}$. Dans l'expression du rotationnel donnée: $E_r = E_z = 0$ et $E_\theta = E(r,t)$ ne dépend que de r on a donc $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = \dfrac{1}{r}\dfrac{rE_\theta}{\partial r}\overrightarrow{U_z} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \dfrac{di}{dt}\overrightarrow{U_z}$ soit $\dfrac{rE_\theta}{\partial r} = -\mu_0 nr\dfrac{di}{dt} = +\mu_0 nIr\omega\sin(\omega t)$.

On intègre par rapport à r: $rE(r,t) = \mu_0 nI\dfrac{r^2}{2}\omega\sin(\omega t)$ soit $E(r,t) = \mu_0 nI\dfrac{r}{2}\omega\sin(\omega t)$.

10. On cherche la force magnétique qui s'applique sur le dipôle de moment $d\overrightarrow{\mathcal{M}}$ placé dans le champ magnétique $\overrightarrow{B} = b(z)\cos(\omega t)\overrightarrow{U_z}$.

Cette force s'écrit $d\overrightarrow{F_m} = (d\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{B}$.

Avec $d\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{grad} = \chi b(z)d\tau\cos(\omega t)\overrightarrow{U_z}.\overrightarrow{grad} = \chi b(z)d\tau\cos(\omega t)\dfrac{\partial}{\partial z}$

Et $d\overrightarrow{F_m} = (d\overrightarrow{\mu}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{B} = \chi b(z)d\tau\cos(\omega t)\dfrac{\partial}{\partial z}(b(z)\cos(\omega t)\overrightarrow{U_z}) = \chi b(z)d\tau\dfrac{db}{dz}\cos^2(\omega t)\overrightarrow{U_z} = -\chi\dfrac{B_0^2}{R}(1-\dfrac{z}{R})d\tau\cos^2(\omega t)\overrightarrow{U_z}$.

Par identification avec l'énoncé on a $\alpha = \chi\dfrac{B_0^2}{R}(1-\dfrac{z}{R})$.

La force magnétique est dirigée selon $-\overrightarrow{U_z}$ or le champ magnétique diminue quand z augmente ($b(z) = 1 - \frac{z}{R}$) donc le dipôle est attiré par les champs forts.

11. La force est en $\cos^2(\omega t)$ soit $\cos(2\omega t) = 2\cos^2(\omega t) - 1$ donc $\cos^2(\omega t) = \dfrac{1+\cos(2\omega t)}{2}$.

On veut que le diapason vibre à la fréquence $f_d = 256\ Hz$ soit à la pulsation $\omega_d = 2\pi f_d$ qui correspond à la fréquence de la force $d\overrightarrow{F_m}$ qui le fait vibrer. Or cette force vibre à la pulsation 2ω. On doit donc avoir $2\omega = \omega_d$ soit $2f = f_d$ où f est la fréquence du courant dans le solénoide qui crée le champ magnétique et f_d la fréquence du diapason. Soit $f = \dfrac{f_d}{2} = 128\ Hz$.

II. **Correction: électrocardiogramme (d'après E3A MP 2025)**

1. Il y a invariance par rotation et par translation donc le champ électrique ne dépend que de r.

Les plans $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ et $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ sont des plans P^+ donc le champ électrique en M appartient à ces deux plans, soit le champ électrique est selon $\overrightarrow{u_r}$.

On choisit pour surface de Gauss, un cylindre de rayon $a < r < a + b$ et de longueur L.

Le flux du champ électrique à travers ce cylindre est $\phi = E(r)2\pi rL$.

On applique le théorème de Gauss qui s'écrit $\phi = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0\epsilon_r} = \dfrac{Q}{\epsilon_0\epsilon_r} = E(r)2\pi rL$. Le champ électrique dans la membrane est donc $\overrightarrow{E} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r rL}\overrightarrow{u_r}$.

2. La relation locale entre le champ électrique et le potentiel est $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) = -\dfrac{dV}{dr}\overrightarrow{u_r}$. On a donc $\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r rL}$ soit en intégrant par rapport à r il vient $V(M) = -\dfrac{Q}{2\pi L\epsilon_0\epsilon_r}\ln r + A$ (relation valable dans la membrane pour $a < r < a + b$).

On obtient la tension demandée $V_A - V_E = V(r = a) - V(r = a + b) = \dfrac{Q}{2\pi L\epsilon_0\epsilon_r}\ln(1 + \dfrac{b}{a}) \approx \dfrac{Qb}{2\pi aL\epsilon_0\epsilon_r}$ pour $a >> b$.

3. On applique la relation $Q = C(V_A - V_E)$ donc $C = \dfrac{Q}{V_A - V_E} = \dfrac{2\pi aL\epsilon_0\epsilon_r}{b}$.

Pour comparer à la donnée de la littérature médicale on a $c_m = \dfrac{C}{2\pi aL} = \dfrac{\epsilon_0\epsilon_r}{b}$. AN: $c_m = 1,0.10^{-2}\ F.m^{-1}$, en accord avec la littérature.

On a $V_A - V_E = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{\sigma S}{c_m S} = \dfrac{\sigma}{c_m}$ donc $\sigma = c_m(V_A - V_E) = -6,1.10^{-4}\ C.m^{-2}$.

4. La tension U_1 s'écrit $U_1 = V_G - V_D = \dfrac{\overrightarrow{p}.\overrightarrow{OG}}{4\pi\epsilon_0 OG^3} - \dfrac{\overrightarrow{p}.\overrightarrow{OD}}{4\pi\epsilon_0 OD^3} = \dfrac{\overrightarrow{p}.(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{DO})}{4\pi\epsilon_0 d^3} = \dfrac{\overrightarrow{p}.\overrightarrow{DG}}{4\pi\epsilon_0 d^3}$.

avec $\overrightarrow{p}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{p}.DG\overrightarrow{u_x} = p_x DG$

On a donc $U_1 = V_G - V_D = \dfrac{p_x DG}{4\pi\epsilon_0 d^3} = Kp_x$ avec $K = \dfrac{DG}{4\pi\epsilon_0 d^3}$.

5. Sur le tableau donné, je trace le vecteur $p_x\overrightarrow{u_x}$ aux instants t_i et j'en déduis l'allure de la courbe p_x en fonction du temps. Or comme $U_1 = Kp_x$ la courbe donnant U_1 en fonction du temps a la même allure. On trouve que cette courbe correspond à la courbe d.