

Sujet CCB modélisation physique

Equation de la conservation de la masse

1. dx est suffisamment petit pour supposé la section $A(x, t)$ uniforme sur le système élémentaire de longueur dx on a donc: $dm(t) = A(x, t)\mu(x, t)dx$ et $dm(t + dt) = A(x, t + dt)\mu(x, t + dt)dx$.

2. La masse qui entre dans le système entre t et $t + dt$ s'écrit en fonction du débit massique en x : $D_{me} = D_m(x, t) = \mu(x, t)A(x, t)v(x, t)$, on en déduit la masse entrante $\delta m_e = D_m(x, t)dt = \mu(x, t)A(x, t)v(x, t)dt$.

De la même manière la masse sortante entre t et $t + dt$, se déduit du débit massique en $x + dx$ soit $\delta m_s = D_m(x + dx)dt = \mu(x + dx, t)A(x + dx, t)v(x + dx, t)dt$.

3. La conservation de la masse s'écrit $dm(t + dt) - dm(t) = +\delta m_e - \delta m_s$ soit $(A(x, t + dt)\mu(x, t + dt) - A(x, t)\mu(x, t))dx = (\mu(x, t)A(x, t)v(x, t) - \mu(x + dx, t)A(x + dx, t)v(x + dx, t))dt$

Avec dt et dx petits on a $\frac{\partial(\mu(x, t)A(x, t))}{\partial t}dtdx = -\frac{\mu(x, t)A(x, t)v(x, t)}{\partial x}dxdx$ soit $\frac{\partial(\mu(x, t)A(x, t))}{\partial t} + \frac{\mu(x, t)A(x, t)v(x, t)}{\partial x} = 0$.

4. $\mu(x, t)A(x, t) = (\mu_0 + \mu_1(x, t))(A_0 + a_1(x, t)) = \mu_0 A_0 + \mu_0 a_1 + \mu_1 A_0 + \mu_1 a_1 \approx \mu_0 A_0 + \mu_0 a_1 + \mu_1 A_0$ en négligeant le terme $\mu_1 a_1$ qui est d'ordre 2.

$\mu(x, t)A(x, t)v(x, t) \approx \mu_0 A_0 v(x, t)$, $v(x, t)$ est d'ordre 1 donc on ne garde que les termes d'ordre 0 dans les expressions de $A(x, t)$ et $\mu(x, t)$.

L'équation de conservation de la masse à l'ordre 1 s'écrit donc $\frac{\partial(\mu_0 A_0 + \mu_1(x, t)A_0 + a_1(x, t)\mu_0)}{\partial t} + \frac{\mu_0 A_0 v(x, t)}{\partial x} = 0$ soit $A_0 \frac{\partial \mu_1(x, t)}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial t} + \mu_0 A_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0$ relation (1).

5. L'équation d'Euler s'écrit: $\mu(x, t)(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}) = -\overrightarrow{\text{grad}}P(x, t)$. Il ne reste que la résultante des forces de pression, la viscosité est nulle et le poids est négligé.

Le terme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est appelée l'accélération locale (point de vue Eulérien).

Le terme $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ est l'accélération convective.

6. L'équation d'Euler devient: $(\mu_0 + \mu_1(x, t))(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}) = -\overrightarrow{\text{grad}}(P_0 + p_1(x, t))$.

Le terme $\mu_1(x, t)\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ est d'ordre 2, le terme d'accélération convective est d'ordre 2 donc à l'ordre 1, il reste: $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p_1(x, t)) = -\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x} \vec{e}_x$.

Soit en projection sur Ox : $\mu_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x}$ relation (2).

7. La distensibilité s'écrit $D = \frac{1}{A_0 + a_1(x, t)} \frac{\partial A(x, t)}{\partial P(x, t)} \approx \frac{1}{A_0} \frac{A(x, t) - A_0}{P(x, t) - P_0} \approx \frac{1}{A_0} \frac{a_1(x, t)}{p_1(x, t)}$ en effet le terme $\frac{\partial A(x, t)}{\partial P(x, t)}$ s'approxime à la petite variation de A divisée par la petite variation de P .

On a donc $a_1 = A_0 D p_1$ (relation (3)).

8. La compressibilité isentropique s'écrit $\chi_S = \frac{1}{\mu(x, t)} \frac{\partial \mu(x, t)}{\partial P(x, t)} \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu(x, t) - \mu_0}{P(x, t) - P_0} \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1(x, t)}{p_1(x, t)}$ en effet le terme $\frac{\partial \mu(x, t)}{\partial P(x, t)}$ s'approxime à la petite variation de μ divisée par la petite variation de P .

On a donc $\mu_1 = \chi_S \mu_0 p_1$ relation (4).

9. Dans la relation (1) de conservation de la masse $A_0 \frac{\partial \mu_1(x, t)}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial t} + \mu_0 A_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0$, on remplace μ_1 et p_1 par leurs expressions obtenues relations (3) et (4) soit: $\mu_1 = \chi_S \mu_0 p_1$ et $a_1 = A_0 D p_1$.

On a donc $A_0 \chi_S \mu_0 \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} + \mu_0 A_0 D \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} + \mu_0 A_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0$.

En simplifiant par $A_0 \mu_0$, il vient: $\chi_S \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} + D \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0$.

10. On dérive la relation (2) par rapport à x : $\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)$ en intervertissant les dérivées par rapport à t et à x .

En utilisant la relation (5): $\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\chi_S \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} - D \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} \right) = (\mu_0(\chi_S + D)) \frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2}$.

On reconnaît une équation de d'Alembert $\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2} - (\mu_0(\chi_S + D)) \frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = 0$ avec pour célérité des ondes sonores dans le tube $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0(\chi_S + D)}}$.

Unités:

$$[\chi_S] = [D] = \left[\frac{1}{P} \right] = \left[\frac{S}{F} \right] = \frac{m^2}{kg.m.s^{-2}} = m.kg^{-1}.s^2.$$

$$[(\mu_0(\chi_S + D))^{-1/2}] = (kg.m^{-3}.m.kg^{-1}.s^2)^{-1/2} = (m^{-2}.s^2)^{-1/2} = m.s^{-1}: \text{on trouve bien une vitesse.}$$

11. AN: $c = 256 m.s^{-1}$.

Traitement des données numériques

12. Le tube doit s'abîmer à force d'être écrasé par le passage des voitures. Pour conserver une valeur constante de sa distensibilité D , il faut le changer régulièrement.

13. Chaque ligne représente une journée, le tableau mesures contient les données pour 10 jours.

14. Le 5ième jour correspond à la 5 ième ligne du tableau soit la ligne 4 (la première ligne est la ligne 0). 13 heures correspond à la 14 ième heure du jour soit le terme numéro 13 dans la ligne.

Instruction 1: mesures[4,13]

15. Instruction 2.1: 10 (nombre de jours du recensement de voitures)

Instruction 2.2: np.sum(mesures[i,:]) (sur chaque ligne i, soit chaque jour, on fait la somme du nombre de voitures à chaque heure)

16. Instructions 3:

```
for i in range(10): i correspond au numéro du jour: jour 1 pour i = 0 à jour 10 pour i = 9
— for j in range(0,24): j correspond à l'heure de la journée de 0h pour j = 0 à 23h pour j = 23
— — if mesures[i,j]>max:
— — — max=mesures[i,j]
— — — jour,heure=i+1,j
print('pic atteint le',jour,'ème jour entre',heure,'et',heure+1,'heures')
```

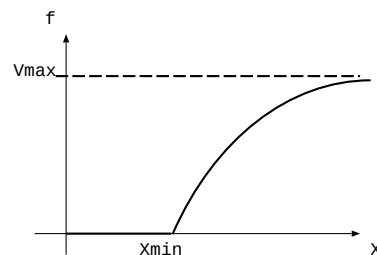
17.

```
plt.bar(heure,mesures[0,:])
plt.grid()
plt.xlabel('heure')
plt.ylabel('nombre de vehicules')
plt.title('nombre de vehicules detectes par jour')
```

Description du modèle

18. Pour $X = X_{min}$: $f(X) = 0$: la vitesse est nulle lorsque les voitures qui se suivent sont à la distance X_{min} l'une de l'autre et pour $X \rightarrow \infty$: $f(X) \approx V_{max}$: lorsque les voitures qui se suivent sont très éloignées l'une de l'autre, elles peuvent rouler à la vitesse maximale.

$f(X)$ est bien une fonction croissante.



19. La vitesse V est égale à $f(X)$. Pour une valeur de V donnée, il n'y a qu'une valeur de $X > X_{min}$ possible donc les voitures sont à la même distance X les unes des autres. Lorsque V augmente, cela veut dire que $f(X)$ augmente c'est donc que X augmente (fonction f croissante). La fonction $f(X)$ tend vers V_{max} sans la dépasser.

20. Pour $X < X_{min}$, $V = f(X) = 0$: les véhicules sont à l'arrêt.

21. On cherche d tel que $f(d) = V = V_{max}(1 - e^{-(d-X_{min})/20})$ avec $V = 20$ m/s, $V_{max} = 30$ m/s et $X_{min} = 7$ m.

On a donc $1 - e^{-(d-X_{min})/20} = \frac{V}{V_{max}}$ soit $-(d-X_{min})/20 = \ln(1 - \frac{V}{V_{max}})$ ou encore $\frac{d - X_{min}}{20} = -\ln(1 - \frac{V}{V_{max}})$.

On a donc $d = X_{min} - 20 \ln(1 - \frac{V}{V_{max}}) = 30$ m.

22. La vitesse est $V = 20$ m/s donc la distance parcourue pendant 2 s est 40 m. La distance obtenue précédemment est $d = 30$ m entre deux véhicules qui se suivent, elle est inférieure à la distance de sécurité conseillée par le code.

Résolution numérique : étude de l'effet d'un ralentissement

23. On doit compter le nombre d'instants auxquels on fait la mesure soit $M = \text{len}(\text{resultat})$ (resultat est une liste qui contient les positions de la voiture 0 aux instants t_m , le nombre de terme dans la liste résultat est le nombre d'instants étudiés).

24. On crée une matrice L avec N lignes (nombre de véhicules) et M colonnes (nombres d'instants): $L = \text{np.zeros}((N, M))$

25. Les conditions initiales correspondent aux positions des différentes voitures à $t = 0$, cela correspond au contenu de la première colonne (la colonne $n = 0$).

for n in (0, N):

— $L[n, 0] = -d * n$

$n = 0$ 1ère voiture à la position initiale $x = 0$, $n = 1$ 2ième voiture à la position initiale $x = -d$,... $n = 9$ 10ième et dernière voiture à la position initiale $x = -9d$

26. La première ligne de L est confondue avec la liste resultat (positions du véhicule de tête aux différents instants).

$L[0, :] = \text{resultat}$

ou for m in range(0, M):

— $L[0, m] = \text{resultat}(m)$

27. def f(X):

— if $X_i = X_{min}$:

— — return 0

— else:

— — return $V_{max} * (1 - \text{np.exp}(-(X - X_{min})/20))$

28. La relation (6) s'écrit $\dot{x}_n = f(x_{n-1}(t) - x_n(t))$.

La vitesse du véhicule n à l'instant t est $\dot{x}_n = \frac{x_n(t + dt) - x_n(t)}{dt} = \frac{x_n^{m+1} - x_n^m}{t_{m+1} - t_m}$ ou $\dot{x}_n = \frac{x_n(t) - x_n(t - dt)}{dt} = \frac{x_n^m - x_n^{m-1}}{t_m - t_{m-1}}$.

On peut évaluer la vitesse en utilisant la position à l'instant t et la position à l'instant précédent ou la position à l'instant t et la position à l'instant ultérieur.

Ici l'énoncé demande de trouver la vitesse à partir de t_{m+1} et t_m donc on utilise $\dot{x}_n = \frac{x_n(t + dt) - x_n(t)}{dt} = \frac{x_n^{m+1} - x_n^m}{t_{m+1} - t_m} = f(x_{n-1}(t_m) - x_n(t_m)) = f(x_{n-1}^m - x_n^m)$.

On a donc $\frac{x_n^{m+1} - x_n^m}{t_{m+1} - t_m} = f(x_{n-1}^m - x_n^m)$ soit $x_n^{m+1} = x_n^m + (t_{m+1} - t_m)f(x_{n-1}^m - x_n^m)$.

avec $x_n^{m+1} = L[n, m+1]$, $x_{n-1}^m = L[n-1, m]$ et $x_{n+1}^m = L[n+1, m]$ soit la relation de récurrence $L[n, m+1] = L[n-1, m] + (T[m+1] - T[m]) * f(L[n-1, m], L[n, m])$.

29. $T = \text{resultat1}$

30. On reprend le résultat de Q28: $x_n^{m+1} = x_n^m + (t_{m+1} - t_m)f(x_{n-1}^m - x_n^m)$ avec $x_n^{m+1} = L[n, m+1]$, $x_{n-1}^m = L[n-1, m]$ et $x_{n+1}^m = L[n+1, m]$ soit la relation de récurrence $L[n, m+1] = L[n-1, m] + (T[m+1] - T[m]) * f(L[n-1, m], L[n, m])$.

for m in range(0,M-1):

— for n in range(1,N):

— — $L[n, m+1] = L[n-1, m] + (T[m+1] - T[m]) * f(L[n-1, m], L[n, m])$

31. Jusqu'à l'instant $t = 5$ s, les voitures roulent à vitesse constante et sont équidistantes les unes des autres.

A l'instant $t = 5$ s, la voiture de tête freine, elle oblige donc les voitures derrière elle à freiner. Un ralentissement se forme qui se propage selon $-Ox$ puisque la zone où les voitures sont proches (points rapprochés sur le schéma) recule au cours du temps.

A l'instant $t = 6$ s, l'avant du ralentissement est à la position $x = 100$ m et à l'instant $t = 17$ s, l'avant du ralentissement est à la position $x = 60$ m. Il s'est propagé à la vitesse moyenne de $\frac{40}{11} = 3,6$ m/s selon $-Ox$.

32. Quand on change t en $-t$ dans l'équation de transport, l'équation devient $\frac{\partial X}{\partial t} + c \frac{\partial X}{\partial x} = 0$, elle est donc modifiée. Or changer t en $-t$ revient à inverser le sens du temps. La modification de l'équation de transport montre que le phénomène n'est pas réversible.

33. On a $\frac{\partial X(x+ct)}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}$ et $\frac{\partial X(x+ct)}{\partial t} = c \frac{\partial X}{\partial t}$. On a donc bien $\frac{\partial X}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial X}{\partial x} = 0$.

$X(x+ct)$ caractérise une onde qui se propage (t et x sont dans le même terme) selon $-Ox$ (les termes devant x et t ont le même signe). c représente la célérité des ondes.