

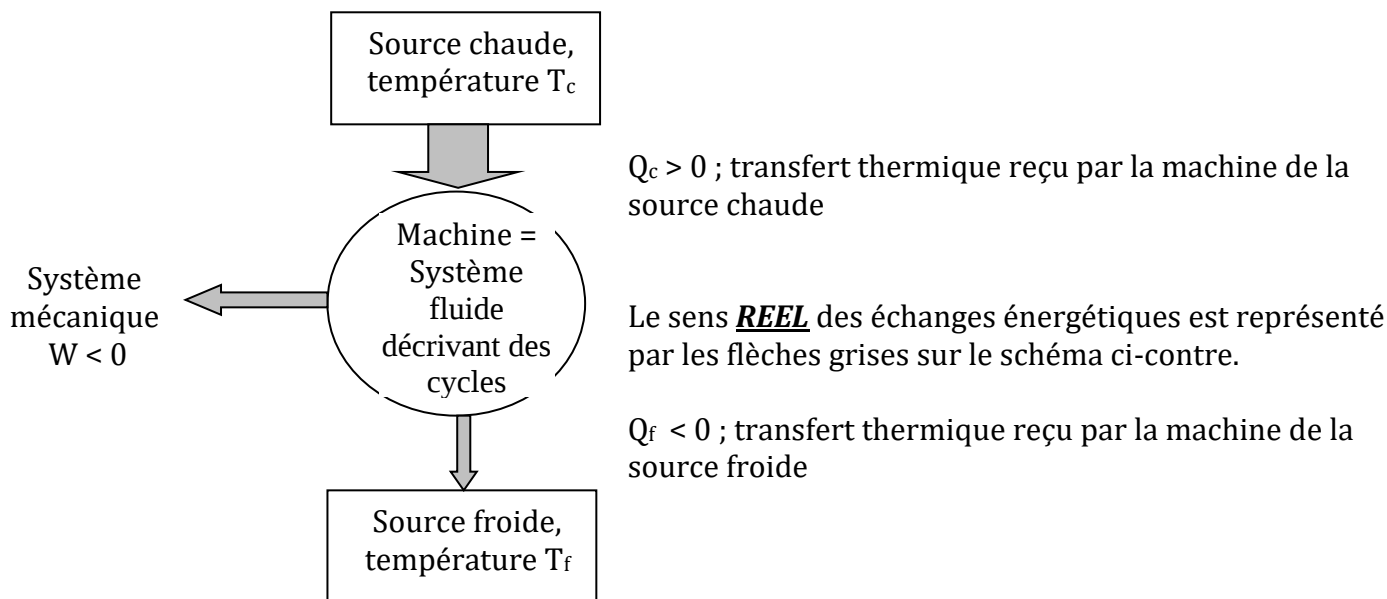
A propos de l'environnement marin

Corrigé rédigé par Nicole ADLOFF (nicole.adloff@gmail.com) et Marc STRUBEL (marc.strubel@wanadoo.fr).

Ce corrigé peut (doit ?) être distribué à vos élèves dès 2024.

Partie A . L'énergie thermique des mers.

Q1.



Q2. Le rendement du moteur de Carnot est $\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{273+5}{273+26} = 0,070$.

Valeur très faible car l'écart entre les températures des deux sources est faible.

Q3. Par hypothèse pour que l'installation soit rentable, il faut que l'écart de température entre les eaux de surface et les eaux profondes soit d'au moins 20°C , il faut donc prélever l'eau froide à au moins 1000 m de profondeur.

Q4. En supposant l'eau incompressible et au repos la relation de la statique des fluides donne $p(1000\text{m}) = P^\circ + \rho_1 g h = 10^5 + 10^3 \cdot 9,8 \cdot 1\,000 = 99\text{ bar}$

Q5. Avantages : la différence de température entre les sources est gratuite ; production de travail sans dégagement de CO_2 .

Inconvénients : pression élevée donc problème de résistance mécanique de l'installation ; milieu marin risque de corrosion ; rendement faible.

Q6. Point critique de température $T_c = 132^\circ\text{C}$ et de pression $P_c = 110\text{ bar}$, au dessus du point critique on ne peut plus différencier les phases liquides et gazeuses, elles ont le même indice de réfraction.

DOCUMENT RÉPONSE 1

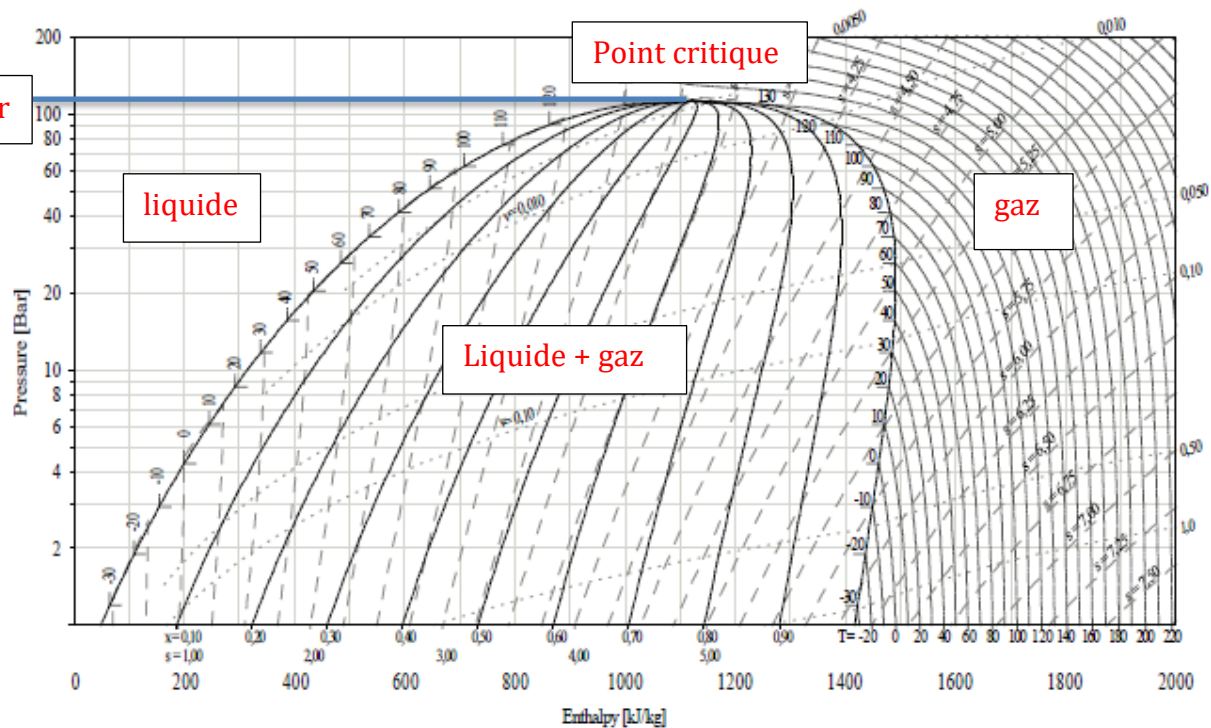
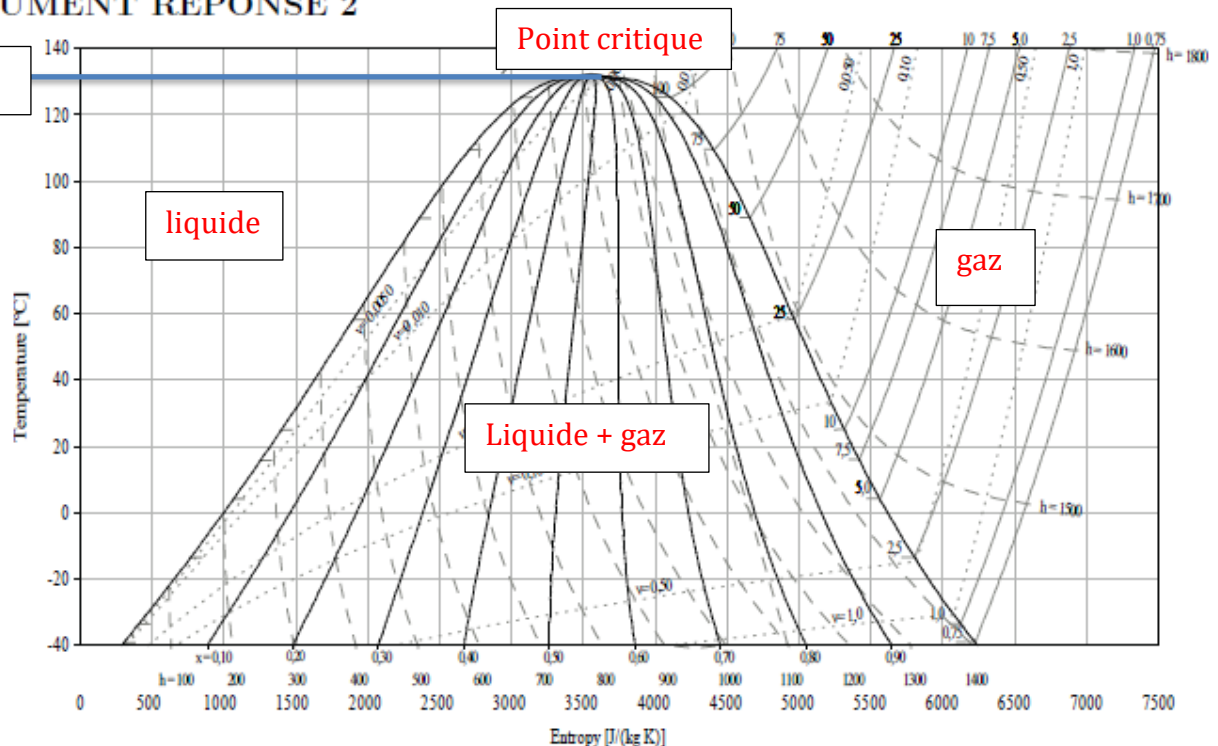
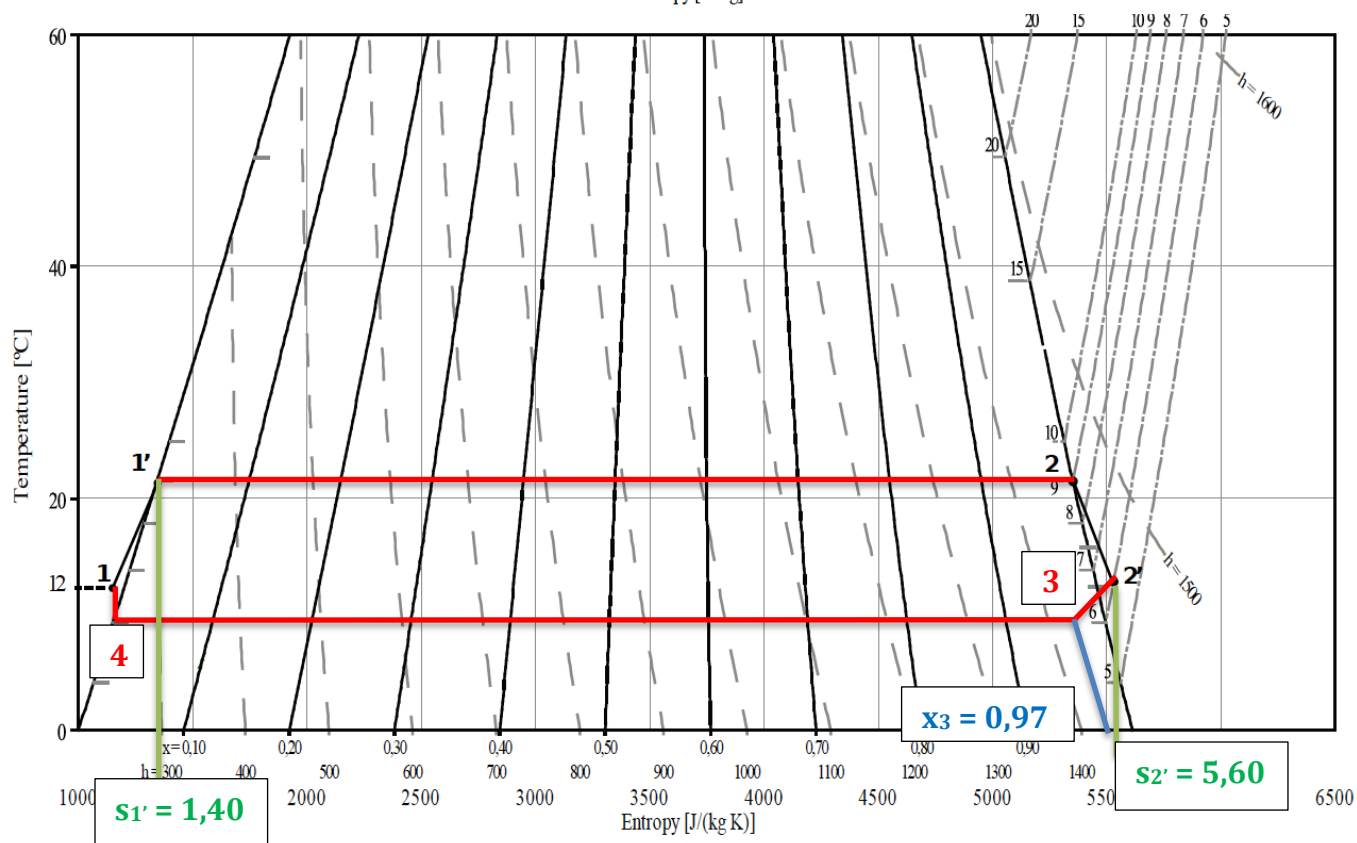
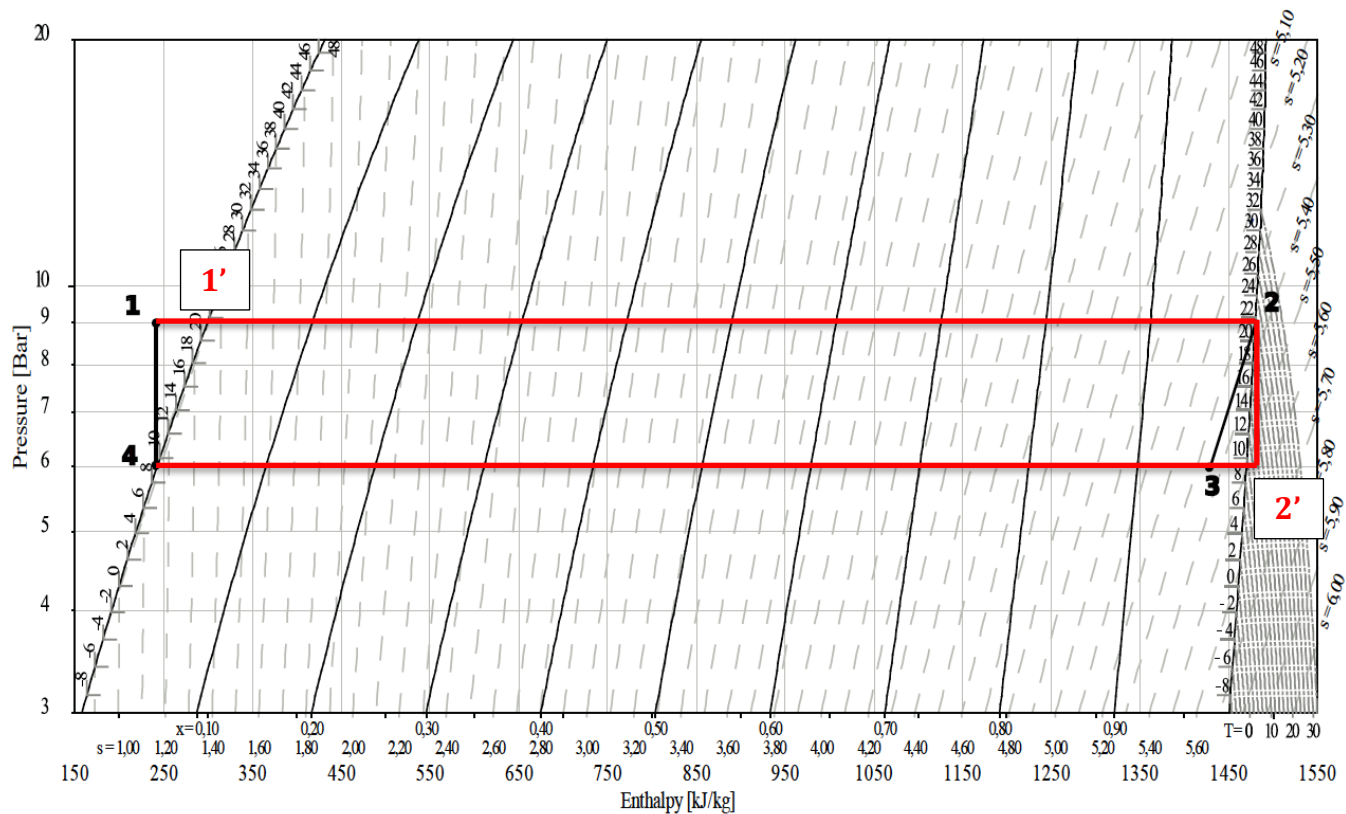


Diagramme de l'ammoniac (P, h). DTU, Department of Energy Engineering,
 s en ($\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$), v en $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, T en $^{\circ}\text{C}$, M.J. Skovrup & H.J.H Knudsen (23-10-03).

DOCUMENT RÉPONSE 2



Q7 et Q8. Les lectures de températures sont faites à l'unité près, les lectures d'enthalpies massiques à 10 kJ/kg près.



Q13.

Point i	T _i (°C)	P _i (bar)	x _i	h _i (kJ.kg ⁻¹)	s _i (kJ.kg ⁻¹ .K ⁻¹)
1	12	9	0	240	1,15
1'	22	9	0	300	1,40
2	22	9	1	1 480	5,40
2'	12	6	1	1 480	5,60
3	9	6	0,97	1 430	5,40
4	9	6	0	240	1,15

Q14. Pour la transformation 1-1' NH₃ est liquide donc $dh = c_{ad}T$, $c_a = \frac{h_1 - h_{1'}}{T_1 - T_{1'}} = \frac{240 - 300}{12 - 22} = 6,0 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$
on trouve $4,7 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ dans la littérature.

Q15. On utilise plutôt de l'ammoniac que de l'eau car les températures de changement d'état sont plus faibles que celles de l'eau, il s'agit d'un oxydant moins fort que l'eau, l'odeur caractéristique du gaz permet de détecter une fuite, par contre il s'agit d'un gaz toxique.

Q16. Cf cours, appliquer le 1^{er} principe de la thermodynamique à un système fermé en écoulement stationnaire et faire des schémas !

$dU = D_m dt(u_s - u_e)$, où est l'énergie interne massique.

On néglige les variations d'énergie cinétique (écoulement stationnaire, de section constante) et potentielle (pas de variation d'altitude à la traversée de la machine)

$dU = \delta W_p + \delta W_{\text{méca}} + \delta Q$

Le travail élémentaire des forces de pression s'écrit $\delta W_p = D_m(P_e / \rho_e - P_s / \rho_s)dt$ (P = pression)

$\delta W_{\text{méca}} = \mathcal{P}_u dt$ et $\delta Q = \mathcal{P}_{th} dt$ et avec $h = u + P / \rho$ on retrouve la relation demandée.

Q17. Le passage dans l'évaporateur correspond à la transformation 1 - 2, qui est la même que le cycle soit réel ou virtuel. Il n'y a pas de pièces mobiles dans l'évaporateur donc $\mathcal{P}_u = 0$

$$\dot{m}_1(h_2 - h_1) = \mathcal{P}_{thER} = \mathcal{P}_{thEV} = 0,4 * (1480 - 240) = 496 \text{ kW} > 0$$

NH₃ reçoit un transfert thermique pour être vaporisé, c'est logique.

Remarque : la valeur numérique de $\dot{m}_1$ se trouve tout en fin d'énoncé... on se demande pourquoi, les autres grandeurs étant des constantes...

Q18. Il s'agit de la transformation 5-6 également dans un évaporateur d'où

$$\mathcal{P}_{thEC} = \dot{m}_e(h_6 - h_5) = \dot{m}_e c_e(T_6 - T_5) < 0 \text{ car } T_6 < T_5$$

Q19. L'évaporateur étant globalement adiabatique $\mathcal{P}_{thEC} + \mathcal{P}_{thE} = 0$ d'où $\dot{m}_e(T_6 - T_5) = -\mathcal{P}_{thER}$

$$\dot{m}_e = -\mathcal{P}_{thER} / (T_6 - T_5) = 496.10^3 / (4.10^3 * 1,5) = 83 \text{ kg.s}^{-1}$$

Q20. La traversée de la vanne étant rapide, on peut supposer que les échanges thermiques n'ont pas le temps de se faire, on peut donc supposer la transformation adiabatique $\mathcal{P}_{th} = 0$ et il n'y a pas de parties mobiles donc $\mathcal{P}_u = 0$, la traversée de la vanne est donc isenthalpique (hypothèse de l'énoncé)

Q21. Le régime étant stationnaire on peut appliquer une loi « des nœuds » entre 2' et 3 avec les débits massiques :

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_3 = 0,45 \text{ kg.s}^{-1}$$

Q22. $\mathcal{P}_{CR} = \dot{m}_3(h_4 - h_3) = 0,45 * (240 - 1430) = -535 \text{ kW}$ et

$$\mathcal{P}_{CV} = \dot{m}_1(h_4 - h_3) = 0,40 * (240 - 1430) = -476 \text{ kW}$$

Ces deux valeurs sont négatives car NH₃ cède de l'énergie lors de la liquéfaction.

Q23. Pour le condenseur globalement adiabatique $\mathcal{P}_{ef} = -\mathcal{P}_{CR} = \dot{m}_e c_e(T_8 - T_7) = 535 \text{ kW}$ d'où

$$T_8 = 5 + 535.10^3 / (83 * 4.10^3) = 6,6^\circ\text{C}$$

Q24. En supposant la détente dans la turbine adiabatique

$$\mathcal{P}_{TV} = \dot{m}_1(h_3 - h_2) = 0,40 * (1430 - 1480) = -20 \text{ kW} < 0$$

Signe cohérent puisque le fluide cède de la puissance pour entraîner la turbine lors de la détente.

Q25. La pompe ayant un fonctionnement isentropique et isenthalpique par hypothèse, on néglige la puissance mécanique de cette pompe par rapport aux autres puissances mécaniques mises en jeu

$$\mathcal{P}_{P1V} = \dot{m}_1(h_1 - h_4) = 0,40 * (240 - 240) = 0$$

Pour le cycle réel :

$$\mathcal{P}_{P1R} = \dot{m}_3(h_1 - h_4) = 0$$

On peut éventuellement évaluer pour NH₃ liquide

$$\mathcal{P}_{P1R} = \dot{m}_3 c_a (T_1 - T_4) = 0,45 * 6.10^3 (12 - 9) = 8,1 \text{ kW}...$$

Q26. Si on prend comme définition du rendement $\eta_v = \left| \frac{\text{gain}}{\text{dépense}} \right|$, le gain est $\mathcal{P}_{TV}$ et la dépense est $\mathcal{P}_{P1V} = 0$, donc un rendement infini...

Maintenant si on revient à la dépense classique d'un moteur thermique, la dépense est la puissance thermique reçue de la source chaude c'est-à-dire $\mathcal{P}_{thEV}$ d'où $\eta_v = \frac{20}{496} = 0,04...$

Q27. Le rendement n'est pas infini car la pompe est réelle $\mathcal{P}_{P1R} = 8,1 \text{ kW}$ alors $\eta_R = \frac{20}{8,1} = 2,5 ...$ mais la turbine pas isentropique, car pas rigoureusement réversible...

Partie B. Naissance et propagation de la houle

Q28. Chaque fluide étant incompressible, on a :

$$\text{div}(\vec{v}_i) = 0, \quad i = 1, 2$$

Chaque champ de vitesse dérivant d'un potentiel, on en déduit :

$$\begin{aligned} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_i) &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta\varphi_i &= 0 \end{aligned}$$

Q29. On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{v}_1}{Dt} &= \frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}_1 = \frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} \text{ au premier ordre} \\ \Rightarrow \frac{D\vec{v}_1}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1) = \overrightarrow{\text{grad}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} \end{aligned}$$

Et :

$$\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}(-gz)$$

L'équation d'Euler donne :

$$\begin{aligned} \rho_1 \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} &= -\overrightarrow{\text{grad}}p_1 + \overrightarrow{\text{grad}}(-gz) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz \right) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz &= C_1(t) \end{aligned}$$

Q30. On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{V}_2}{Dt} &= \frac{\partial\vec{V}_2}{\partial t} + (\vec{V}_2 \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{V}_2 = \frac{\partial\vec{V}_2}{\partial t} + ((\vec{U} + \vec{v}_2) \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{V}_2 \\ &= \frac{\partial\vec{V}_2}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{V}_2 = \frac{\partial\vec{V}_2}{\partial t} + \left(U \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{V}_2 \text{ au premier ordre} \\ \Rightarrow \frac{D\vec{V}_2}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_2) + \left(U \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_2 \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

L'équation d'Euler donne cette fois :

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{p_2}{\rho_2} + gz = C_2(t)$$

Q31. On calcule :

$$u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}; w_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$$

La vitesse en $z = -h$ (fond) ne peut avoir de composante selon Oz, soit :

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=-h} = 0$$

Remarque : le fluide étant parfait il peut avoir une composante parallèle au fond.

Q32. On calcule :

$$u_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}; w_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}$$

L'écoulement de l'air étant supposé « non perturbé » loin de la surface, la vitesse en $z \rightarrow \infty$ tend vers U, soit :

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)_{z \rightarrow \infty} = 0; \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{z \rightarrow \infty} = 0$$

Q33. Dans le milieu 1 (eau) :

$$w_1(x, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + w_1 \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \text{ au premier ordre}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(x, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Dans le milieu 2 (air) :

$$w_2(x, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (U + u_1) \frac{\partial \eta}{\partial x} + w_1 \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ au premier ordre}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(x, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Q34. L'équation proposée traduit la continuité de la pression en $z_s(x, t) = \eta(x, t)$. D'après les dernières lignes de la partie III, on a :

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(x, 0, t) + g\eta(x, t) \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(x, 0, t) + U \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, 0, t) + g\eta(x, t) \right)$$

qui est l'équation proposée.

Q35. D'après Q21 :

$$\Delta \varphi_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -k^2 \underline{\phi}_2(z) + \frac{\partial^2 \underline{\phi}_2(z)}{\partial z^2} = 0$$

La solution s'écrit :

$$\underline{\phi}_2(z) = A_2 e^{-kz} + B_2 e^{kz}$$

La condition aux limites obtenue en Q32 permet d'obtenir $B_2 = 0$, d'où :

$$\underline{\phi}_2(z) = \underline{\phi}_2(0) e^{-kz} = \underline{\phi}_2^0(0) e^{-kz}$$

Q36. D'après Q21 :

$$\Delta \varphi_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -k^2 \underline{\phi}_1(z) + \frac{\partial^2 \underline{\phi}_1(z)}{\partial z^2} = 0$$

La solution s'écrit :

$$\underline{\phi}_1(z) = A_1 e^{-kz} + B_1 e^{kz}$$

La condition aux limites obtenue en Q31 permet d'obtenir :

$$-kA_1 e^{kh} + kB_1 e^{-kh} = 0$$

On en déduit :

$$\underline{\phi}_1(z) = A_1 e^{-kz} + A_1 e^{kz} e^{2kh} = A_1 e^{kh} (e^{-k(z+h)} + e^{k(z+h)}) = 2A_1 e^{kh} \cosh(k(z+h))$$

Avec :

$$\underline{\phi}_1^0 = 2A_1 e^{kh}$$

D'où :

$$\underline{\phi}_1(z) = \underline{\phi}_1^0 \cosh(k(z+h))$$

Q37. D'après Q33 :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(x, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\phi}_1^0 k \sinh(kh) = j\omega \eta_m$$

Et :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(x, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow -k \underline{\phi}_2^0 = j\omega \eta_m - jkU \eta_m = j(\omega - kU) \eta_m$$

Q38. D'après Q34 :

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(x, 0, t) + g\eta(x, t) \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(x, 0, t) + U \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, 0, t) + g\eta(x, t) \right)$$

$$\Leftrightarrow \rho_1 (j\omega \underline{\phi}_1^0 \cosh(kh) + g\eta_m) = \rho_2 (j\omega \underline{\phi}_2^0 - U \cdot jk \underline{\phi}_2^0 + g\eta_m)$$

Soit en remplaçant $\underline{\phi}_1^0$ et $\underline{\phi}_2^0$ avec Q 36 et Q37 :

$$\rho_1 \left(j\omega \frac{\cosh(kh)}{k \sinh(kh)} j\omega \eta_m + g\eta_m \right) = \rho_2 \left(-j(\omega - kU) j(\omega - kU) \frac{\eta_m}{k} + g\eta_m \right)$$

$$\Leftrightarrow \rho_1 \left(\frac{(j\omega)^2}{\tanh(kh)} + gk \right) = \rho_2 \left(- (j(\omega - kU))^2 + gk \right)$$

Q39. On a :

$$\underline{\eta}(x, t) = \eta_m e^{j(\omega' t - kx)} e^{-\omega'' t}$$

Pour des oscillations divergentes on doit avoir :

$$\omega'' < 0$$

Q40. $\tanh(kh) \rightarrow 1$ lorsque $kh \rightarrow \infty$. L'équation précédente s'écrit :

$$\rho_1 \left((j\omega)^2 + gk \right) = \rho_2 \left(- (j(\omega - kU))^2 + gk \right)$$

$$\Leftrightarrow (gk - (\omega)^2) = \frac{\rho_2}{\rho_1} (gk - (\omega)^2 + (kU)^2 - 2\omega kU)$$

Compte tenu du fait que $\frac{\rho_2}{\rho_1} \ll 1$, on simplifie :

$$(gk - (\omega)^2) = \frac{\rho_2}{\rho_1} ((kU)^2 - 2\omega kU)$$

$$\Leftrightarrow (gk - \omega'^2 + \omega''^2 - 2j\omega' \omega'') = \frac{\rho_2}{\rho_1} ((kU)^2 - 2(\omega' + j\omega'')kU)$$

La partie réelle de cette équation est :

$$gk - \omega'^2 + \omega''^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} ((kU)^2 - 2\omega'kU) \quad \text{équation (1)}$$

La partie imaginaire de cette équation est :

$$\Rightarrow \omega' = \frac{\rho_2}{\rho_1} kU \quad \text{équation (2)}$$

En remplaçant ω' par sa valeur (équ 2) dans l'équation (1), et tenant compte du fait que $\frac{\rho_2}{\rho_1} \ll 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \omega''^2 &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left((kU)^2 - 2 \frac{\rho_2}{\rho_1} (kU)^2 \right) - gk + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} kU \right)^2 \\ &\approx \frac{\rho_2}{\rho_1} (kU)^2 - gk \end{aligned}$$

Il est curieux que la condition ne porte pas sur le signe de ω'' , il y a probablement un autre calcul possible, toutefois on doit avoir :

$$\omega''^2 > 0$$

qui donne bien :

$$U^2 > \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{g}{k}$$

Q41. On calcule facilement avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda < \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{2\pi}{g} U^2$ $\lambda < \frac{1,2}{1000} \frac{2\pi}{9,8} \left(\frac{100}{3,6} \right)^2$

$$\lambda < 0,59 \text{ m}$$

Si on choisit $\tanh(kh) = 1 - 0,01 = 0,99$, on obtient $kh = 2,65$, soit pour la valeur limite de λ :
 $h = 0,25 \text{ m}$.

On constate donc que l'approximation de profondeur infinie n'est pas très contraignante.

Q42. La relation V1 s'écrit avec les hypothèses proposées :

$$\left(gk - \frac{\omega^2}{\tanh(kh)} + \right) = \frac{\rho_2}{\rho_1} (\omega^2 + gk)$$

Soit puisque $\tanh(kh) < 1$:

$$gk - \frac{\omega^2}{\tanh(kh)} = 0$$

Q43. En eau profonde, la relation se simplifie en :

$$\omega^2 = gk$$

On calcule :

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g}{k}}; v_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

La vitesse de phase dépend de k : la propagation est dispersive.

Q44. Les deux figures correspondent à un phénomène de propagation dispersive puisque le paquet d'onde se déforme.

Pour la houle, v_ϕ augmente avec λ : les grandes longueurs d'onde se propagent plus vite et sont donc à l'avant du paquet d'onde : c'est la figure b.

Q45. Pour $kh \ll 1$, on a $\tanh(kh) = kh$ à l'ordre le plus bas. La relation de dispersion s'écrit donc :

$$\omega^2 = ghk^2$$

On calcule alors :

$$v_{\varphi} = v_g = \sqrt{gh}$$

Q46. La propagation n'est plus dispersive. Le profil spatial du paquet d'onde à t_r est donc strictement identique au profil à $t = 0$, mais décalé autour de x_r .

Q47. On calcule :

$$c = \sqrt{gh} = \sqrt{gh_0} \sqrt{\frac{h}{h_0}} = \frac{c_0}{n(h)} \text{ avec } n(h) = \sqrt{\frac{h_0}{h}}$$

$$Q48. n(x) = \sqrt{\frac{h_0}{h_0 - \beta x}}$$

Q49. En $x = 0$, on a $n(0)=1$, d'où :

$$\begin{aligned} \sin(\theta_0) &= n(x) \cdot \sin(\theta(x)) \\ \Leftrightarrow \sin(\theta(x)) &= \sin(\theta_0) \sqrt{1 - \frac{\beta x}{h_0}} \end{aligned}$$

Q50. On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \tan(\theta(x)) &= \frac{\sin(\theta(x))}{\sqrt{1 - (\sin(\theta(x)))^2}} = \frac{\sin(\theta_0) \sqrt{1 - \frac{\beta x}{h_0}}}{\sqrt{1 - (\sin(\theta_0))^2 \left(1 - \frac{\beta x}{h_0}\right)}} \\ \frac{dy}{dx} = f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\sin(\theta_0))^2 \left(1 - \frac{\beta x}{h_0}\right)} - 1}} \end{aligned}$$

Q51. La relation de récurrence s'écrit :

$$y_{N+1} = y_N + f(x) * p$$

Ligne 13 : `return (1/mt.sin(theta0)**2/(1-beta*x/h0)-1)**(-.5)`

Ligne 20 : `y=Y[n]+f(x)*p`

Q52. L'énoncé précise que la ligne de crête est une ligne de champ du vecteur d'onde. En traçant quelques vecteurs vitesse le long de la première crête, on obtient le graphique ci-dessous (on a dessiné la crête à deux instants ultérieurs). Aux temps longs la crête devient parallèle à l'axe Ox , donc à la plage. C'est bien ce que l'on observe sur la photo.

