

Vitesses mécaniques et célérités des ondes

Corrigé rédigé par Marc LEGENDRE et Marc STRUBEL (marc.strubel@wanadoo.fr).

Merci à Marc TULOUP pour son aide à la Q13.

Ce corrigé peut (doit ?) être distribué à vos élèves dès 2025.

Partie A . Mécanique et célérité de la lumière

Q1. On a :

$$t'_k = t_k + \frac{d_k}{c_0}; t'_{k+1} = t_{k+1} + \frac{d_{k+1}}{c_0}$$

La soustraction de ces deux équations fournit :

$$d_{k+1} = d_k + c_0(t'_{k+1} - t'_k - T) \quad (1)$$

La période perçue par le récepteur est :

$$T' = t'_{k+1} - t'_k \quad (2)$$

Le véhicule se déplaçant à la vitesse v , on a également :

$$d_{k+1} = d_k + v(t'_{k+1} - t'_k) \quad (3)$$

On déduit des équations précédentes :

$$T' = T \frac{c_0}{c_0 - v}$$

qui montre que la réception est périodique **quelle autre méthode ?**

Il s'agit de l'effet Doppler (longitudinal).

Q2. On élève au carré la relation :

$$\overrightarrow{ER_{k+1}} = \overrightarrow{ER_k} + \overrightarrow{R_k R_{k+1}}$$

et on obtient :

$$d_{k+1}^2 = d_k^2 + v^2 T'^2 + 2v_x T' d_k \approx d_k^2 + 2v_x T' d_k$$

en ne conservant que le premier ordre en v .

Q3. **En supposant que** $2v_x T' \ll d_k$ **(cette hypothèse manque)** un DL 1 fournit :

$$d_{k+1} = d_k + v_x T' \quad (4)$$

Les relations (1) et (2) étant toujours valables, on déduit des relations (1) (2) et (4) :

$$\begin{aligned} c_0(T' - T) &= v_x T' \\ \Leftrightarrow T' &= \frac{T}{1 - v_x / c_0} \end{aligned}$$

Q4. La troisième loi de Kepler permet de calculer :

$$T_J = 3,73 \cdot 10^8 \text{ s} = 1,04 \cdot 10^5 \text{ h} = 3,73 \cdot 10^3 \text{ jours} = 1,18 \cdot 10^1 \text{ an}$$

Q5. La rotation de Jupiter autour du Soleil étant uniforme, celle de la Terre dans le référentiel proposé **(qu'il aurait été souhaitable de nommer)** que nous noterons R_J l'est également.

La rotation s'effectuant autour de S, la trajectoire reste circulaire.

La vitesse angulaire de la Terre dans le référentiel héliocentrique est :

$$\omega_T = 2\pi / T_0$$

La vitesse angulaire de la Terre dans R_J est :

$$\omega'_T = \omega_T - \omega_J = \omega_T - 2\pi / T_J$$

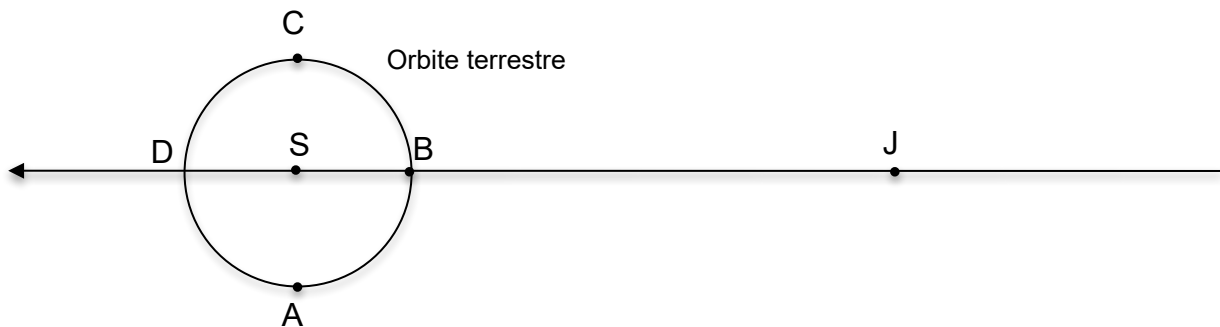
Remarque : il s'agit ici d'une composition de vitesses angulaires, totalement HP.

On a finalement :

$$v = a_0 \omega'_T = 2,74 \cdot 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Un schéma peut éclairer la situation, en effet la vitesse d'éloignement est définie en Q3 comme la projection sur l'axe ER_k de la vitesse, or cet axe varie avec la position de la Terre, et n'est confondu qu'exceptionnellement avec l'axe Jupiter-Soleil (points B et D). **Ce point aurait du être soulevé et un schéma aurait du être fourni, car la figure 2 était de ce point de vue particulièrement piègeuse.**

On va dans la suite confondre ces deux axes, ce qui est très approximatif comme on peut le voir sur la figure ci-dessous dans laquelle le rapport entre les distances ST et SJ est respecté.



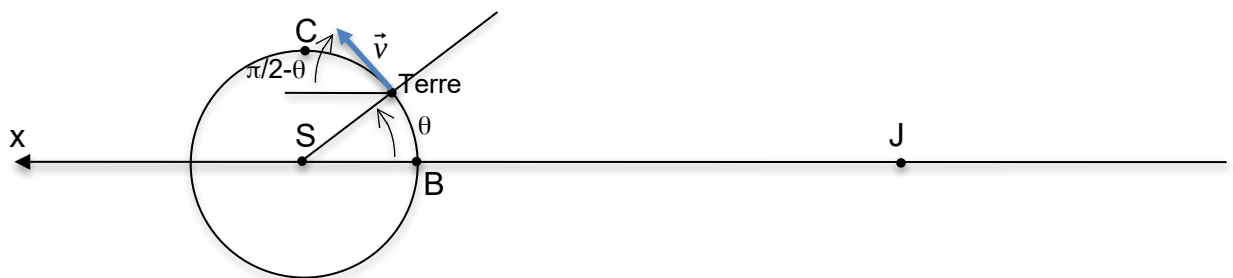
Les valeurs extrêmes sont alors en A et C, elles sont opposées et égales en norme à v . La valeur d'éloignement moyenne est donc nulle, on la trouve en B et D.

Q6. Remarque : les questions « peu ou pas guidées » sont peu repérables.

On cherche le retard cumulé sur une demi-révolution terrestre, entre B et D.

Définissons un angle θ pour la rotation terrestre (figure). On a ici :

$$v_x = v \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = v \sin(\theta)$$



En considérant $v_x \ll c_0$, la formule obtenue en Q3 s'écrit avec un DL1 en v_x / c_0 :

$$T' = \frac{T}{1 - v_x / c_0} = T \left(1 + \frac{v_x}{c_0}\right)$$

Soit ici :

$$T' - T = T \frac{v_x}{c_0} = \square_m \frac{v_x}{c_0}$$

Cette différence est le retard $\square_1$ pour une période de Io. Pour trouver $\Delta\tau/2$, on doit maintenant cumuler tous ces retards entre les positions B et C (entre A et B ce sont des avances).

Pendant une durée dt , le nombre de périodes de Io est :

$$dN = dt / \square_m$$

Et le retard :

$$d\tau = dN_m \frac{v}{c_0} \sin \theta = dt \frac{v}{c_0} \sin \theta = dt \frac{a_0 \dot{\theta}}{c_0} \sin \theta = \frac{a_0}{c_0} \sin \theta d\theta$$

On en déduit :

$$\Delta \tau = 2 \frac{a_0}{c_0} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 2 \frac{a_0}{c_0}$$

Sur l'orbite terrestre, en assimilant la période dans R_J à la période terrestre :

$$T_0 = \frac{2\pi a_0}{v}$$

D'où :

$$\Delta \tau = \frac{v T_0}{\pi c_0}$$

On en tire :

$$c_0 = \frac{v T_0}{\pi \Delta \tau} = 2 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette valeur est excellente pour l'époque !

Q7. La troisième loi de Kepler appliqué à Io permet de calculer la masse de Jupiter :

$$M_J = 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

Soit :

$$M_J / M_o = 10^{-3}$$

On calcule alors la position du centre de masse G :

$$\vec{SG} = \frac{M_J}{M_o + M_J} \vec{SJ} = 7,78 \cdot 10^8 \text{ m} \approx R_s$$

Les centres des deux systèmes sont donc extrêmement proches à l'échelle des distances des planètes au soleil.

Remarque : deux pages et demie de corrigé pour les 7 premiers questions ; qui dit mieux ?

II. Les perturbations séculaires de l'orbite de Mercure

Q8. On a :

$$r_{\max} = \frac{p}{1-e} ; r_{\min} = \frac{p}{1+e}$$

On en déduit :

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} = 0,206 ; p = \frac{2r_{\max}r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} = 5,55 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

Q9. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans le référentiel galiléen d'étude(?) permet d'écrire :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM_{\odot}}{r^2} \vec{u}_r, \text{ soit } K = GM_{\odot}$$

La force étant centrale, le moment cinétique est constant, ce qui donne bien :

$$r^2 \dot{\theta} = \text{cte} = C_a$$

C_a est la constante des aires.

Q10. On a :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\vec{v}}{d\theta} = \frac{K}{r^2} \frac{d\vec{u}_{\theta}}{d\theta} \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{d\theta} C_a &= \frac{K}{r^2 \dot{\theta}} \frac{d\vec{u}_{\theta}}{d\theta} \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{d\theta} &= \frac{K}{C_a} \frac{d\vec{u}_{\theta}}{d\theta}, \text{ soit } H = \frac{C_a}{K} \end{aligned}$$

Remarque : la notation H, qui peut rappeler une longueur, mais qui est l'inverse d'une vitesse, me semble piégeuse.

Q11. On a donc par intégration :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\vec{u}_{\theta}}{H} + \vec{cte} \\ \Leftrightarrow H \vec{v} &= \vec{u}_{\theta} + \vec{A} \quad (5) \end{aligned}$$

Au périhélie :

$$\theta = 0, \vec{u}_{\theta} = \vec{u}_y, \vec{v} = v \vec{u}_y$$

donc :

$$\vec{A} = A \vec{u}_y$$

La projection sur $\vec{u}_{\theta}$ de l'équation :

$$H \vec{v} = \vec{u}_{\theta} + A \vec{u}_y$$

fournit :

$$\begin{aligned} Hr \dot{\theta} &= 1 + A \cos \theta \\ \Leftrightarrow \frac{H C_a}{r} &= 1 + A \cos \theta \\ \Leftrightarrow r &= \frac{H C_a}{1 + A \cos \theta} \end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation de la trajectoire, avec :

$$A = e \text{ et } p = H C_a$$

Q12. En supposant une trajectoire circulaire, de rayon moyen $r_m = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = 5,8 \cdot 10^{10} \text{ m}$, on calcule :

$$v_\theta = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_m}} \Rightarrow \frac{v_\theta}{c_0} = 1,60 \cdot 10^{-4}$$

Tout se passe comme si K subissait une variation relative $(1,60 \cdot 10^{-4})^2 = 3 \cdot 10^{-8}$.

En différenciant logarithmiquement la loi de Kepler, on a :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta K}{K} = 10^{-8}$$

On calcule à l'aide de r_m et de la troisième loi de Kepler la période de Mercure :

$$T = 76 \cdot 10^5 \text{ s} = 88 \text{ jours}$$

Un siècle représente $N = 415$ révolutions, la variation cumulée de période sera de :

$$\Delta t_{tot} = 415 \cdot 10^{-8} \cdot 76 \cdot 10^5 \text{ s} = 3,4 \text{ s}$$

Q13. On doit calculer la moyenne temporelle de l'accélération relativiste sur un tour, soit :

$$\langle \vec{a}_{rel} \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\gamma K}{r^2} \frac{v_\theta^2}{c_0^2} \vec{u}_r dt$$

On peut remarquer que par symétrie cette moyenne est portée par $\vec{u}_x$, on calcule donc :

$$\langle \vec{a}_{rel} \rangle \vec{u}_x = \langle \vec{a}_{rel} \vec{u}_x \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\gamma K}{r^2} \frac{v_\theta^2}{c_0^2} \cos \theta dt$$

Avec $v_\theta = r \dot{\theta} = \frac{C_a}{r}$ et $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$:

$$\frac{v_\theta^2}{r^2} \cos \theta dt = r \dot{\theta} \frac{C_a}{r} \left(\frac{1 + e \cos \theta}{p} \right)^2 \cos \theta dt = \frac{C_a}{p^2} (1 + e \cos \theta)^2 \cos \theta d\theta = \frac{C_a}{p^2} (\cos \theta + 2e \cos^2 \theta + e^2 \cos^3 \theta) d\theta$$

A l'aide des intégrales proposées en fin d'énoncé, on a donc :

$$\langle \vec{a}_{rel} \vec{u}_x \rangle = -\frac{\gamma K}{c_0^2 T} \frac{C_a}{p^2} [0 + 2e\pi + 0]$$

Soit avec $p = \frac{C_a^2}{K}$:

$$\langle \vec{a}_{rel} \rangle = -\frac{\gamma K}{c_0^2 T} \frac{C_a}{p^2} 2e\pi \vec{u}_x = -\frac{\gamma K}{c_0^2 T} \frac{C_a}{p} \frac{K}{C_a^2} 2e\pi \vec{u}_x = \frac{\gamma K}{c_0^2 T} \frac{K 2\pi}{p C_a} \vec{u}_z \wedge e \vec{u}_y$$

On a donc :

$$A = \frac{2\pi}{T} \frac{K}{p c_0^2} = 2,2 \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-1}$$

Q14. On écrit :

$$\left\langle \frac{d\vec{v}}{dt} \right\rangle = \langle \vec{a}_{rel} \rangle$$

$$\Leftrightarrow \frac{K}{C_a} \left\langle \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right\rangle + \frac{K}{C_a} \left\langle \frac{d\vec{e}}{dt} \right\rangle = A \frac{\gamma K}{C_a} \vec{u}_z \wedge \vec{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{e}}{dt} = A \gamma \vec{u}_z \wedge \vec{e}$$

Soit :

$$\vec{\Omega} = A \gamma \vec{u}_z$$

On calcule :

$$A\gamma = 2,2 \cdot 10^{-14} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 14,3'' \text{ par siècle}$$

On arrive avec $\gamma = 3$ à $43''$ par siècle.

III. Propagation de la lumière dans un fluide en mouvement

$$\text{Q15. } \Delta t = \frac{L}{c_2} - \frac{L}{c_1} = \frac{L \Delta c}{c_m^2} ; \Delta \varphi = \omega_0 \Delta t = \frac{2\pi c_0}{\lambda_0} \frac{L \Delta c}{c_m^2}$$

$$\text{Q16. Sans entrainement } \Delta c = 0 \implies \Delta \varphi = 0 \implies \Delta N = 0$$

Q17. On calcule :

$$\begin{aligned} \Delta N &> \Delta N_{\min} \\ \iff \frac{\Delta \varphi}{2\pi} &> \Delta N_{\min} \\ \iff \frac{c_0}{\lambda_0} \frac{2vL}{c_m^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &> \Delta N_{\min} \\ \iff L &> \frac{\lambda_0 c_0 \Delta N_{\min}}{2v(n^2 - 1)} = 11,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Pour le modèle d'entrainement total : $\Delta N = \frac{2vLn^2}{\lambda_0 c_0} = 1,71$. Le modèle pourra être validé.

Q18. On a ici (il aurait été souhaitable de faire figurer u_x sur la figure 4) :

$$\vec{c}_1 = \frac{c_0}{n} \vec{u}_x + v \vec{u}_x ; \vec{c}_2 = \frac{c_0}{n} \vec{u}_x - v \vec{u}_x$$

Soit en projetant :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{c_0}{n} + v ; c_2 = \frac{c_0}{n} - v \\ \Delta c &= 2v ; c_m = \sqrt{\left(\frac{c_0}{n}\right)^2 - v^2} \approx \frac{c_0}{n} \end{aligned}$$

On retrouve le modèle d'entrainement total.

Q19. Par symétrie :

$$v_{\frac{M}{R}} = \frac{v_{\frac{M}{R}} - v_e}{1 - \frac{v_e v_{\frac{M}{R}}}{c_0^2}}$$

On constate que si $v_{\frac{M}{R}} \ll c_0$ on retrouve la formule classique.

Pour $v_{\frac{M}{R}} = \pm c_0$, $v_{\frac{M}{R}} = \pm c_0$, ce qui est conforme à l'invariance de c_0 .

Q20. Pour $v_e = +v$:

$$c_1 = \frac{v + \frac{c_0}{n}}{1 - \frac{v}{nc_0}} \approx v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{c_0}{n} \text{ au premier ordre}$$

Pour $v_e = -v$:

$$c_2 \approx -v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{c_0}{n} \text{ au premier ordre}$$

Q21. On a alors :

$$\Delta c = 2v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

et

$$c_m^2 = \left(v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{c_0}{n} \right) \left(-v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{c_0}{n} \right) = \left(\frac{c_0}{n} \right)^2 - v^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^2 \approx \left(\frac{c_0}{n} \right)^2$$

$$\Longleftrightarrow c_m = \frac{c_0}{n}$$

On ne peut donc distinguer le modèle relativiste du modèle d'entraînement partiel de Fizeau.

Partie B : Mécanique et célérité des ondes acoustiques

Q22. Pour une corde vibrante de longueur d fixée à ses deux extrémités, nous avons montré que la fréquence du fondamental est

$$f_1 = \frac{c_a}{2d}$$

Pour $d = 200\mu m$, on trouverait une fréquence avec la célérité du son dans l'air proche de 10^6 Hz. Comme la célérité dans le sable est nettement supérieure, cela ferait une fréquence encore plus grande et très largement supérieure à celle trouvée expérimentalement (80 Hz). Ce modèle ne convient pas du tout.

Q23. L'énergie potentielle de pesanteur est, à une constante près que l'on peut prendre nulle, $E_p = mgz(G)$ avec $z(G)$ l'ordonnée du barycentre de la boule. On a donc

$$E_p = mgd \cos \theta$$

Le grain sera en équilibre stable si $\theta < 0$. Or, en prenant un triangle constitué par G et les barycentres des deux grains en contact sur la couche inférieure, on a

$$\frac{\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \alpha = \pi$$

En effet les 3 barycentres forment un triangle équilatéral dans lequel l'angle entre les côtés est $\frac{\pi}{3}$. On a finalement

$$\theta = \alpha - \frac{\pi}{6}$$

L'équilibre est donc rompu si

$$\alpha > \frac{\pi}{6}$$

Q24. L'angle passe de $\theta = \alpha - \frac{\pi}{6}$ à $\theta + \frac{\pi}{3} = \alpha + \frac{\pi}{6}$. En l'absence de frottement, l'énergie mécanique se conserve de sorte que

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgd \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}mv_F^2 + mgd \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

On a donc, avec la formule proposée

$$v_F^2 = v_i^2 + 4gd \sin \alpha \sin \frac{\pi}{6}$$

d'où

$$v_F^2 = v_i^2 + 2gd \sin \alpha$$

Q25. On reprend l'expression précédente mais en tenant compte du choc inélastique :

$$v_i'^2 = (1 - \varepsilon)v_i^2 + 2gd \sin \alpha$$

Au cours des chocs successifs la vitesse évolue selon la formule de récurrence

$$v_{n+1}^2 = (1 - \varepsilon)v_n^2 + 2gd \sin \alpha$$

qui correspond à une suite arithmético-géométrique de la forme $u_{n+1} = \gamma u_n + \beta$ avec $|\gamma| = 1 - \varepsilon < 1$ et $\beta = 2gd \sin \alpha$. D'après le formulaire fourni, on a donc

$$v_{lim}^2 = \frac{\beta}{1 - \gamma}$$

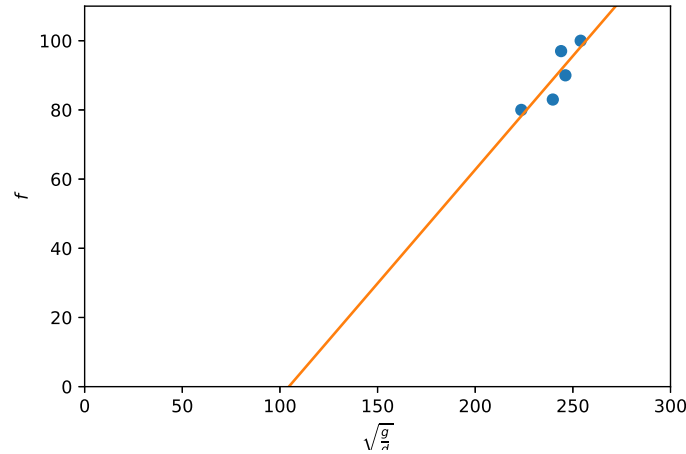
soit

$$v_{lim}^2 = \frac{2gd \sin \alpha}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \kappa = \frac{2 \sin \alpha}{\varepsilon}$$

Q26. La fréquence du chant est celle des chocs. On a donc

$$f = \frac{v}{d} = \sqrt{\frac{\kappa g}{d}}$$

On a tracé pour les différentes données la fréquence en fonction de $\sqrt{\frac{g}{d}}$ et réalisé une régression linéaire :



On constate que la fréquence n'est pas tout à fait proportionnelle à $\sqrt{\frac{g}{d}}$ puisque la droite de régression linéaire est du type $y = ax + b$. Néanmoins en négligeant b , on obtient $a = 0,66$ soit $\kappa = a^2 = 0,44$.

Ce modèle n'est pas pertinent pour décrire le chant de dunes de plage puisque la fréquence y est nettement plus grande (de l'ordre du kHz) et les grains de diamètre similaire (et le facteur ε ne modifie que légèrement la fréquence obtenue).

Q27. A l'équilibre, l'équation de Navier-Stokes projetée selon $\vec{u}_z$ donne

$$\frac{\partial p_{st}}{\partial z} = -\rho g$$

puisque $\vec{v}$ est une constante en l'absence d'onde.

L'équation de Navier-Stokes se simplifie donc

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1 + \eta \Delta \vec{v}$$

Q28. Par définition, $\chi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$

On a donc à l'ordre 1

$$\boxed{\underline{\rho} = \rho_0 \chi \underline{p}}$$

Q29. En l'absence de viscosité, l'équation de Navier-Stokes s'écrit en complexe, au premier ordre :

$$\rho_0 i \omega \underline{\vec{v}} = i \underline{k} \underline{p}$$

et on a donc

$$\boxed{\rho_0 \omega \underline{\vec{v}} = \underline{k} \underline{p}}$$

L'équation de conservation de la masse $\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ s'écrit

$$-\rho_0 i \underline{k} \cdot \underline{\vec{v}} + i \omega \underline{\rho} = 0$$

Or,

$$\underline{\rho} = \rho_0 \chi \underline{p}$$

d'où

$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{v} = \chi \omega \underline{p}}$$

On obtient donc en éliminant $\underline{p}$

$$\rho_0 \chi \omega^2 = k^2$$

d'où

$$\boxed{c_a = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}} = 1560 \text{ m.s}^{-1}}$$

Q30. On utilise la définition de l'intensité et $|\underline{p}| = p_{ref} 10^{I_{dB}/20} = 10^3 \text{ Pa}$ pour une intensité de 180 dB.

$$\boxed{|\underline{\rho}| = \rho_0 \chi |\underline{p}| = 4,1 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}}$$

et

$$\boxed{|\vec{v}| = \frac{|\underline{p}|}{\rho_0 c} \approx 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}}$$

Ces amplitudes sont effectivement très faibles devant ρ_0 et c_a . L'approximation acoustique est légitime.

Q31. L'équation de conservation de la masse donne toujours : $\vec{k} \cdot \vec{v} = \chi \omega \underline{p}$

L'équation de Navier-Stokes à l'ordre 1 en complexe implique :

$$\rho_0 i \omega \vec{v} = i \vec{k} \underline{p} - \eta k^2 \vec{v}$$

d'où

$$\rho_0 \chi \omega^2 = k^2 (1 + i \eta \chi \omega)$$

soit

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 / c_a^2}{1 + i \eta \chi \omega}}$$

On a donc $\omega_c = \frac{1}{\chi \eta} = 2,03 \cdot 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$

Pour $\omega \ll \omega_c$, la viscosité est négligeable. Seules les ondes de très grandes fréquences seront concernées par la viscosité de l'eau car ω_c est extrêmement grande.

Q32. La relation de dispersion montre que k est complexe pour des fréquences élevées. k a donc une partie imaginaire non nulle ce qui implique un phénomène d'atténuation de l'onde acoustique à haute fréquence.

On peut simplifier la relation de dispersion avec un DL à l'ordre 1:

$$k \approx \frac{\omega}{c_a} \left(1 - \frac{i \omega}{2 \omega_c} \right)$$

On obtient la partie imaginaire de k : $k'' = -\frac{\omega^2}{2 c_a \omega_c}$.

L'amplitude de la surpression décroît alors en $e^{k'' z}$ et l'intensité acoustique décroît linéairement avec z :

$$I_{dB} = 20 \log_{10} e^{k'' z} + cte = 20 \log_{10}(e) k'' z + cte$$

$$\boxed{\beta = -20 \log_{10}(e) k'' = \frac{10 \log_{10}(e) \omega^2}{c_a \omega_c}}$$

Pour $f = 20 \text{ kHz}$, limite des ultra-sons, on trouve $\beta \approx 0,002 \text{ dB/km}$

Pour $f = 100 \text{ kHz}$, onde ultra-sonore, on trouve $\beta \approx 0,1 \text{ dB/km}$

C'est la valeur mesurée mais la fréquence ne correspond pas au domaine audible !

Q33. On peut proposer une vitesse typique $v_0 = 5 \text{ km/h}$.

On a alors :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho \approx \rho_0 \operatorname{div} \underline{\vec{v}} + \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \underline{\rho}$$

à l'ordre 1

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \right) \vec{v} \approx \left(\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \right) \underline{\vec{v}}$$

Q34. L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors:

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{\vec{v}}}{\partial t} + \rho_0 \left(\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \right) \underline{\vec{v}} = - \overrightarrow{\operatorname{grad}} \underline{p}$$

On peut l'écrire en complexe :

$$\rho_0 i \omega \underline{\vec{v}} - i \rho_0 v_0 \vec{u} \cdot \vec{u}_x k \underline{\vec{v}} = i k \vec{u} \underline{p}$$

soit

$$\rho_0 \underline{\vec{v}} (\omega - k v_0 \cos \theta) = \vec{k} \underline{p}$$

De même l'équation de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ donne

$$i \omega \underline{\rho} = \rho i \vec{k} \cdot \underline{\vec{v}} + i v_0 \vec{k} \cdot \vec{u} \underline{\rho} = i \omega \chi \underline{p}$$

soit

$$\boxed{(\omega - \cos \theta v_0 k) \chi \underline{p} = \vec{k} \cdot \underline{\vec{v}}}$$

On retrouve les deux équations proposées avec

$$\boxed{\Omega = k v_0 \cos \theta}$$

Q35. En combinant les deux relations on obtient :

$$k^2 = \rho_0 \chi (\omega - \Omega)^2$$

La célérité est donc :

$$c'_a = \frac{\omega}{k} = c_a + \frac{\Omega}{k} = c_a + v_0 \cos \theta$$

Cette relation est effectivement analogue à la loi de composition des vitesses : seule la composante de $\vec{v}_0$ selon la direction de propagation doit être prise en compte ce qui est tout à fait logique.