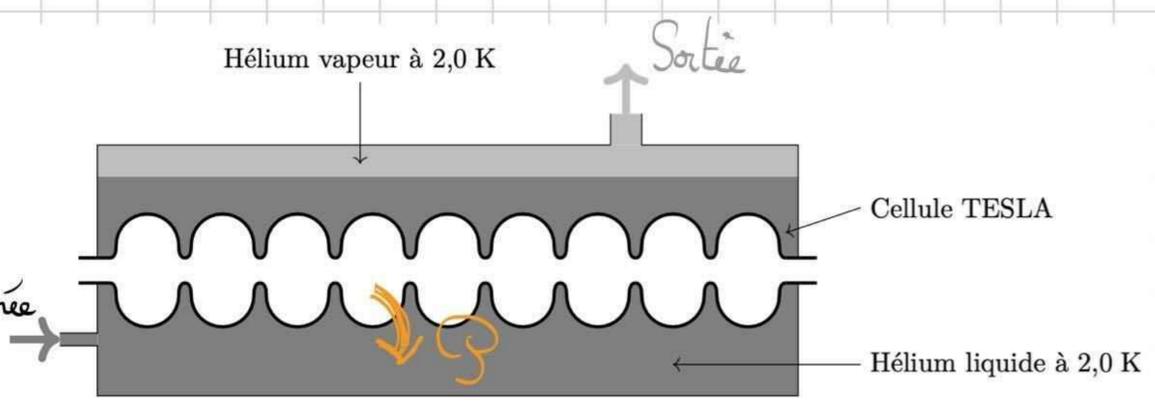


# Partie A - Accélérateur linéaire

## I - Puissance dissipée dans la cellule TESLA

Q1.

$\Sigma$  = Hélicium en écoulement, entrant liquide et sortant sous forme gazeux.



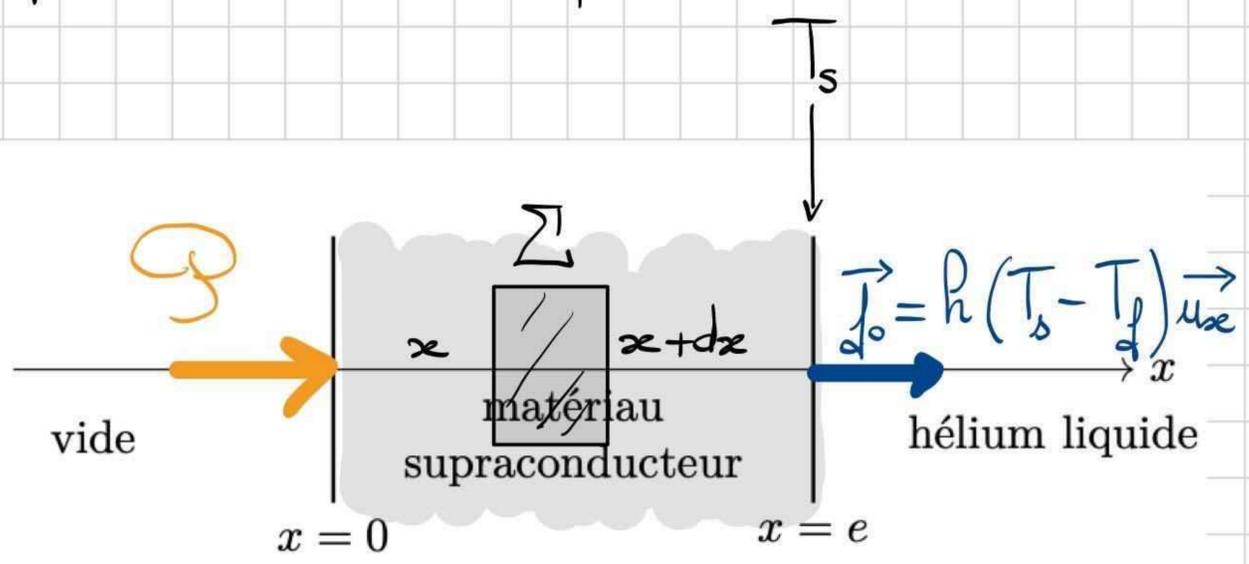
Le 1<sup>er</sup> principe pour les  $\Sigma$  en écoulement donne alors :

$$\mathcal{D}_m \times \Delta h_{He} = \mathcal{P}$$

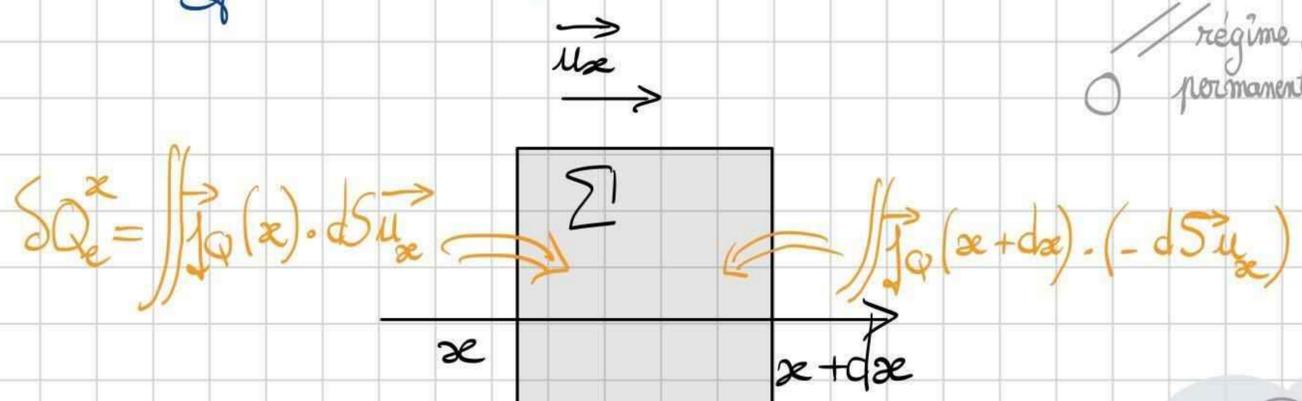
|| L'hélium est à  $P_{sat}$  (2K) (pas très clair dans l'énoncé)

Et on a donc  $\mathcal{P} = \mathcal{D}_m \Delta_{vap} h = 4,7 \text{ W}$

## II - Température de la paroi interne de la cavité:



Q2. (cf cours) On applique le 1<sup>er</sup> principe à  $\Sigma = [Sdx]$  subissant 1 transform = isoV entre t et t + dt :  $dU = \delta W + \delta Q_x^e + \delta Q_{x+dx}^e$



d'où (...)  $-\frac{dj_Q}{dx} = 0$  (ce qui donne  $j_Q(x) = C^t = j_0$ )

La loi de Fourier donne alors  $\frac{dT}{dx} = 0$

Q3. On reprend ① avec la loi de Fourier donne  $-k \frac{dT}{dx} = j_0$ .  
 d'où  $T(x) = -\frac{j_0}{k} x + A$  et on a  $T_s = -\frac{j_0}{k} e + A$  d'où,  
 pour finir :  $T(x) = T_s + \frac{j_0}{k} (e - x)$

Q4.  $T(x=0) = T_s + \frac{j_0 e}{k}$  et on a :  $\frac{j_0}{h} + T_f = T_s$  d'où :

$$T(x=0) = T_f + \frac{j_0}{h} \left( \frac{e}{k} + \frac{1}{h} \right) = 2,34 K \text{ pour le "mauvais" supraconducteur et } 2,01 K \text{ pour le "bon"}$$

$\underbrace{\quad}_{T_{He}}$  (la  $R_{th} \rightarrow \infty$  pour le bon supraconducteur)

### III Cavité électromagnétique résonante

Q5. (d cours)

On a  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$  d'où  $+\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = +\Delta \vec{E}$

Maxwell Faraday  $\parallel \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 
Maxwell Gauss + vide  $\parallel 0$ 
Maxwell-Ampère + vide  $\parallel \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  avec  $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$

et en projetant suivant  $\vec{e}_z$ , on a bien l'éq<sup>e</sup> de d'Alembert demandée.

Q6. En injectant  $E_z = \xi(r) \Psi(r)$  dans l'éq<sup>e</sup> de d'Alembert, on obtient :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} \Psi(r) = c^2 \xi(t) \times \left( \Psi''(r) + \frac{1}{r} \Psi'(r) \right)$$

Laplacien en cylindriques

on divise par  $\Psi(r) \times \xi(t)$

$$\underbrace{\frac{1}{\xi(t)} \times \frac{d^2 \xi}{dt^2}}_{f = \text{dépendant du temps}} = c^2 \times \underbrace{\frac{1}{\Psi(r)} \times \left( \Psi''(r) + \frac{1}{r} \Psi'(r) \right)}_{f = \text{dépendant de } r} = c^2 = A$$

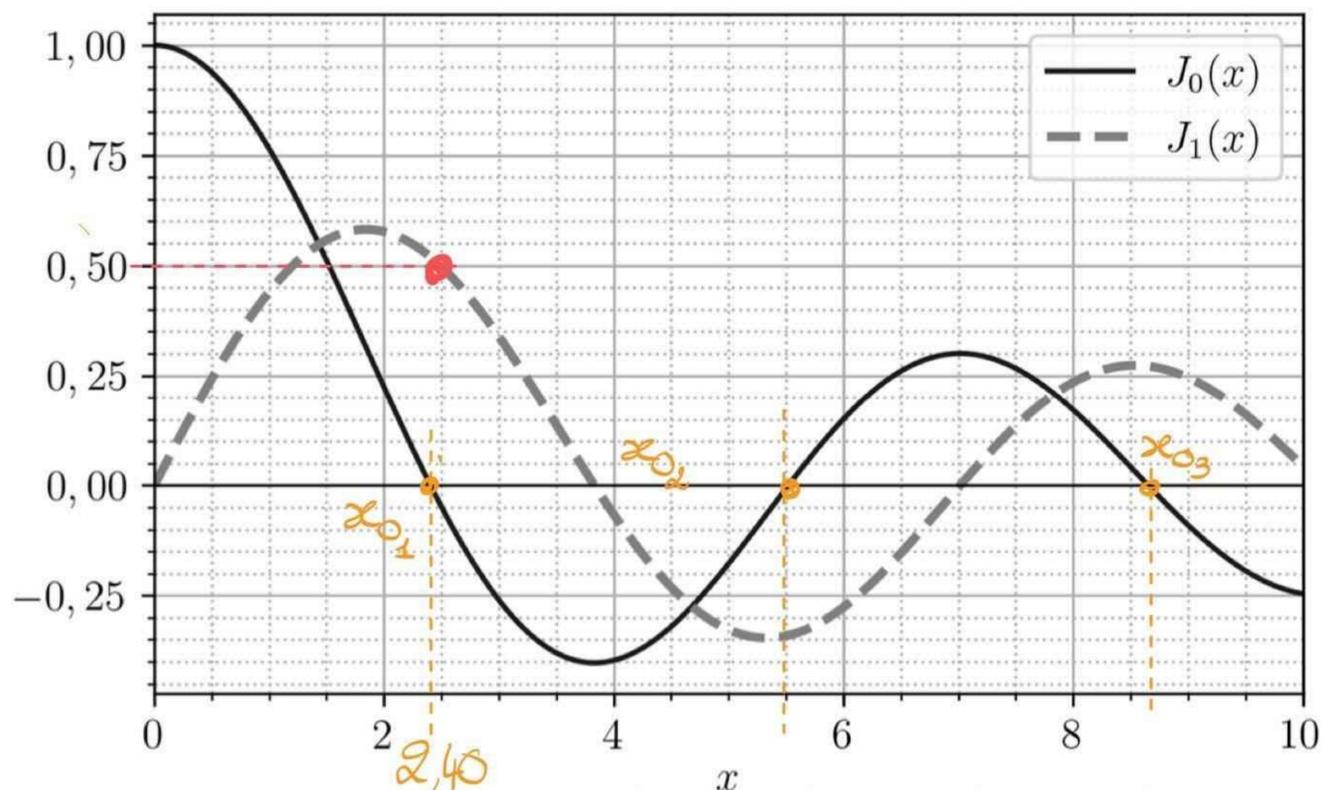
Et on a bien  $\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - A \zeta = 0$  et  $\frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} - \frac{A}{c^2} \Psi = 0$

Supposons tout d'abord  $A > 0$  et posons  $\omega'$  tq  $A = \omega'^2$ . Les solutions de (T) sont alors de la forme  $\zeta(t) = d e^{\omega' t} + \beta e^{-\omega' t}$

$\downarrow$   $\frac{d}{dt} \int \delta t = 0$   
 $\uparrow$   $\Psi = \text{inacceptable}$

On choisit alors  $d = 0$  et on a  $\zeta(t) = \beta e^{-\omega' t} \rightarrow 0$   
 et la cavité  $\neq$  résonante. On a donc  $A = -\omega^2 < 0$

Q7. On admet  $E(r; t) = -E_0 \sin(\omega t) \times J_0(kr)$  avec  $k = \frac{\omega}{c}$



On a  $J_0(k_m R) = 0$  pour  $\frac{\omega_m}{c} \times R = x_{0m}$  d'où  $\omega_m = \frac{c \times x_{0m}}{R}$

Q8. On a  $R = \frac{c \times x_{01}}{\omega_1} = 8,81 \text{ cm}$

Q9. On rappelle que Maxwell-Faraday donne:  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (MF)  
 or  $\text{rot}(E(r; t) \vec{e}_z) = -\frac{\partial E}{\partial r} \vec{e}_\theta = +E_0 \sin(\omega t) \times \frac{d}{dr} (J_0(kr)) \vec{e}_\theta = k E_0 \sin(\omega t) \times J_1(kr) \vec{e}_\theta$   
 on primitive la relation (MF) et on obtient alors  
 $\vec{B}(r; t) = \frac{E_0 \omega}{\omega c} \cos(\omega t) J_1(kr) \vec{e}_\theta + \vec{F}(r)$

On note que  $\langle \vec{B}(r;t) \rangle = \vec{F}(r)$  et on a donc  $\vec{F}(r) = \vec{0}$

$\parallel$   
 $\vec{0}$  (d'énoncé)

et par conséquent:  $\vec{B}(z;t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) J_1(kr) \vec{e}_\theta$

Q10. L'amplitude du champ magnétique est alors:  $B_{01} = \frac{E_0}{c} \times J_1(x_{01})$

$B_{01} = 83 \text{ mT}$ .

$\parallel$   
0,5

## IV Choix du matériau supraconducteur

Q11. Pour le Niobium (seulement), on a  $B_{01} < B_c$  et par ailleurs  $T_c > T(x=0)$  (donc ok)

## V Mouvement d'un électron dans la cavité résonante

Q12.  $\frac{mg}{eE} = \frac{9,1 \times 10^{-31} \times 9,81}{16 \times 10^{-13} \times 10^7} \ll 1$ : le poids est bien négligeable devant la force électrique

Q13. On a:  $\frac{1}{\gamma^2} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right)$  et on a donc bien  $1 - \frac{v}{c} = \frac{1}{2\gamma^2}$

$\approx 2$  pour  $v \approx c$

Q14. pour  $v \ll c$ , on a:

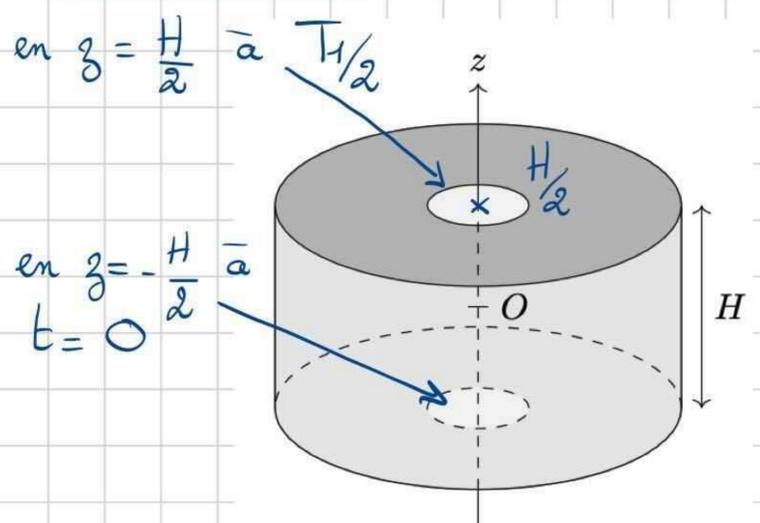
$E_c = (\gamma - 1) \times mc^2 \underset{\text{pour } v \ll c}{\approx} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1\right) \times mc^2 = \frac{1}{2} mv^2$  on retrouve bien l'exp. "classique" de l' $E_c$ .

Q15.  $\gamma = 1 + \frac{E_c}{mc^2}$  (attention!  $E_c$  en Joules)  $3,9 \times 10^4$  et  $1 - \frac{v}{c} = \frac{1}{2\gamma^2} = 3,3 \times 10^{-10} \ll 1$

Q16. On considère  $v = ct = c$

et on a donc  $c \times \frac{T_1}{2} = H$

d'où  $H = c \times \frac{\pi}{\omega_1} = 11,5 \text{ cm}$



Q17. On dispose de la relation  $dE_c = -e x (-E_0 \sin(\omega_1 t) \vec{e}_z) \cdot (c \vec{e}_z) dt$   
 d'où  $E_c(\frac{T_1}{2}) - E_c(0) = + e E_0 c \int_0^{\frac{T_1}{2}} \sin(\omega_1 t) dt$  d'où :

$$\Delta E_c = \frac{2 e E_0 c}{\omega_1} = 3,67 \text{ MeV}$$

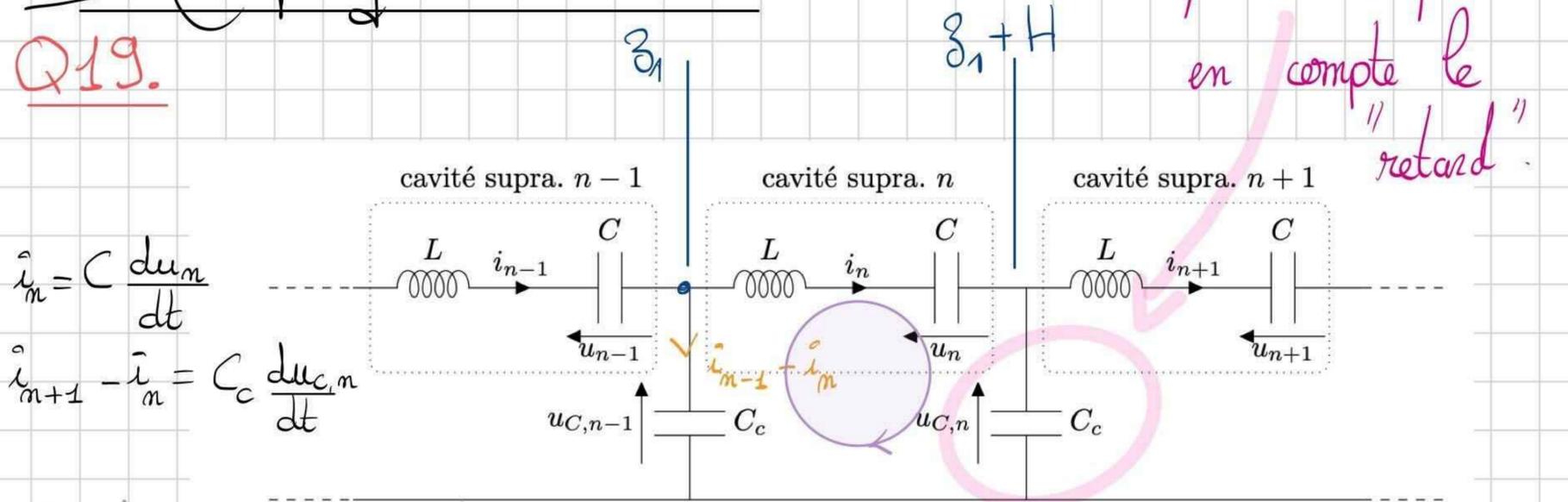
Q18.  $\Delta E_c^{\text{tot}} = 9 \text{ GeV} = N \Delta E_c$  et  $N = \frac{\Delta E_c^{\text{total}}}{\Delta E_c} = 2459$   
 $L \approx N \times H = 283 \text{ m}$

en négligeant la lg<sup>ueur</sup> de l'intervalle inter-cellules.

La longueur de l'accélérateur à Hambourg  $\approx 3,4 \text{ km}$   
 que dire de l'odg?

## VI Couplage des cavités

Q19.



$$\dot{i}_m = C \frac{du_m}{dt}$$

$$\dot{i}_{m+1} - \dot{i}_m = C_c \frac{du_{C,m}}{dt}$$

La loi des mailles donne :

$$u_{C,m-1} - L \times \frac{di_m}{dt} - u_m - u_{C,m} = 0$$

d'où  $\frac{i_{m-1} - i_m}{C_c} = L \frac{d^2 i_m}{dt^2} + \frac{i_m}{C} + \frac{i_m - i_{m+1}}{C_c}$

ou encore :

$$\frac{i_m}{LC} \left(1 + \frac{2C}{C_c}\right) + \frac{d^2 i_m}{dt^2} - \frac{i_{m+1} + i_{m-1}}{LC_c} = 0$$

Q20. Cherchons des solutions de l'éq<sup>°</sup>  $\tau$  associée à celle que nous venons de trouver, sous la forme :  $\underline{i}_m = \underline{I}_0 e^{j(-\Omega t - kmH)}$ .

question non soulignée mais qui demande au  $\ominus$  autant d'initiative que  $Q_1$ ...

On a alors :  $\frac{I_0}{LC} \left( 1 + \frac{2C}{C_0} \right) - \Omega^2 I_0 - \frac{(e^{-j\beta H} + e^{j\beta H}) \times I_0}{LC_0} = 0$

$= -\Omega_a^2$   $= \beta \Omega_a^2$

Et on obtient bien la rel. avancée par l'énoncé :

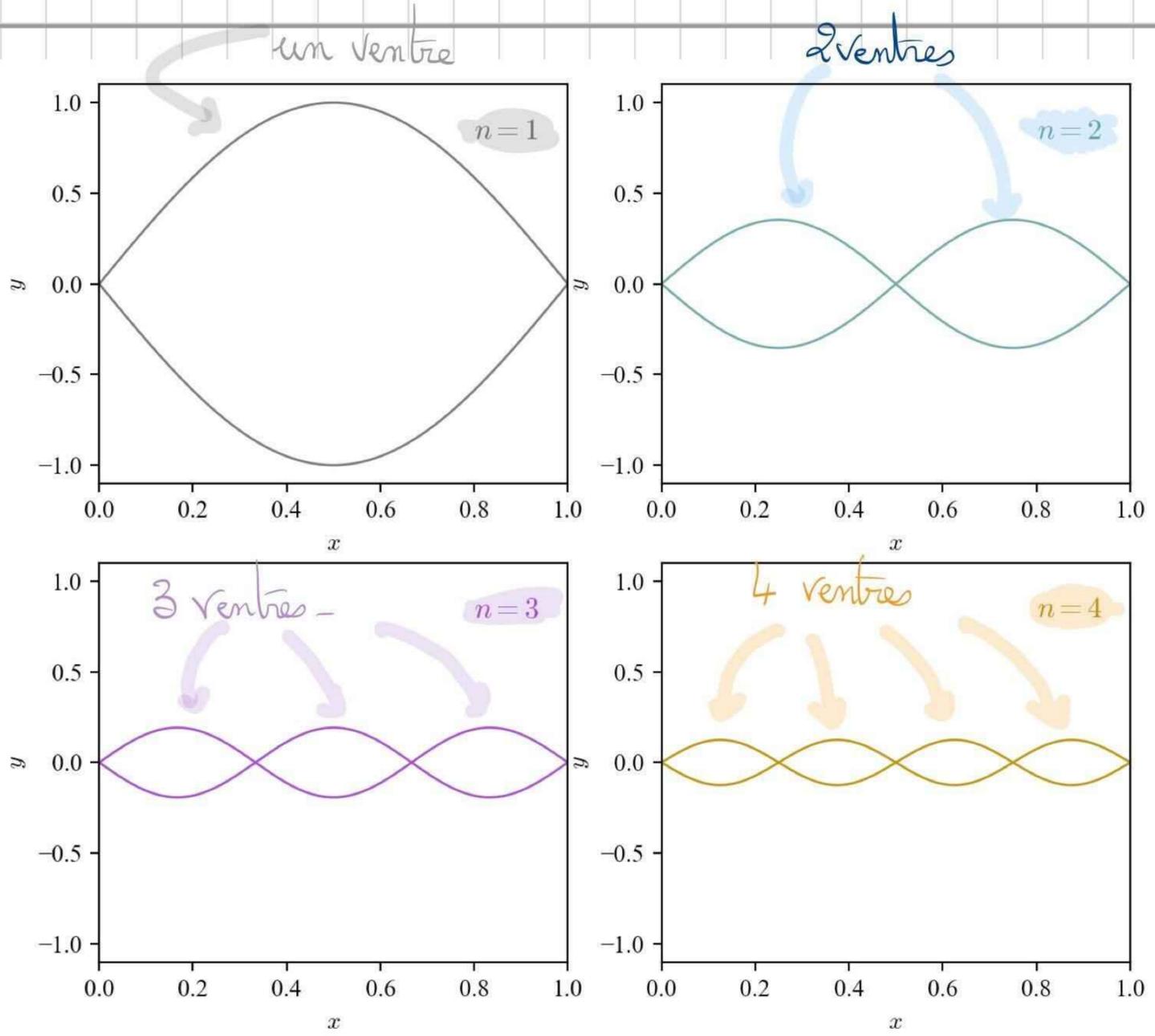
$\Omega^2 = \Omega_a^2 (1 - \beta \cos(\beta H))$

21.

donc que l'on a :

$f_i = i \times \frac{c}{2L}$

et  $f_i$  avec  $i$

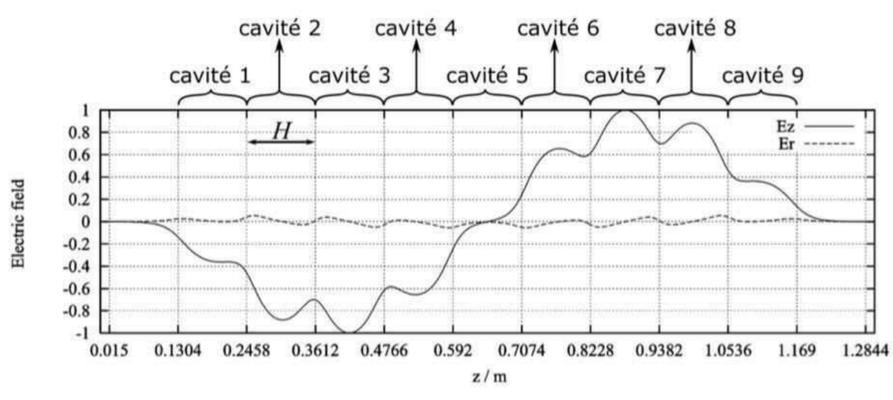


22.

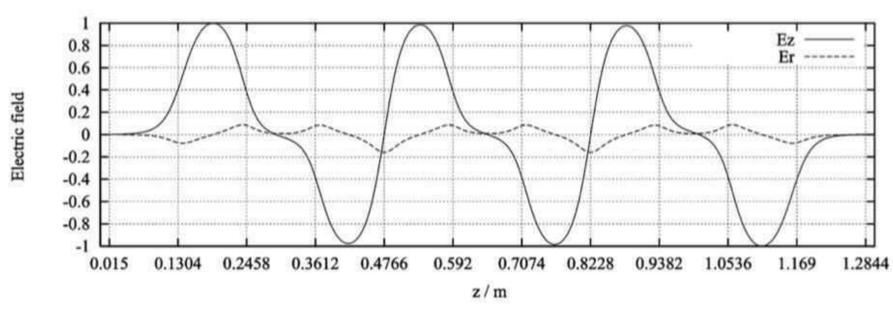
2 ventres  
 $\Downarrow$   
 $i = 2$

6 ventres  
 $\Downarrow$   
 $i = 6$

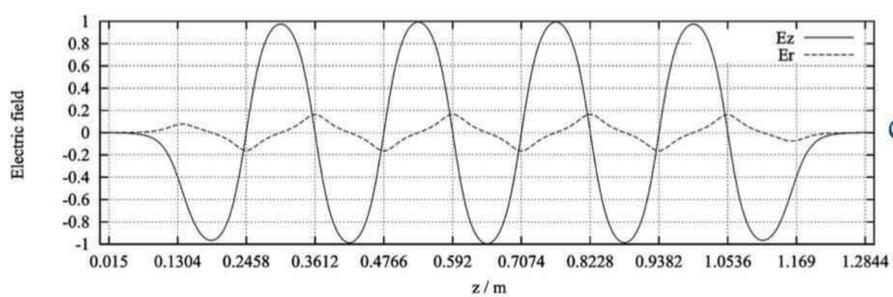
9 ventres  
 $\Downarrow$   
 $i = 9$



$f_2 = 1,2776 \text{ GHz}$



$f_6 = 1,2994 \text{ GHz}$

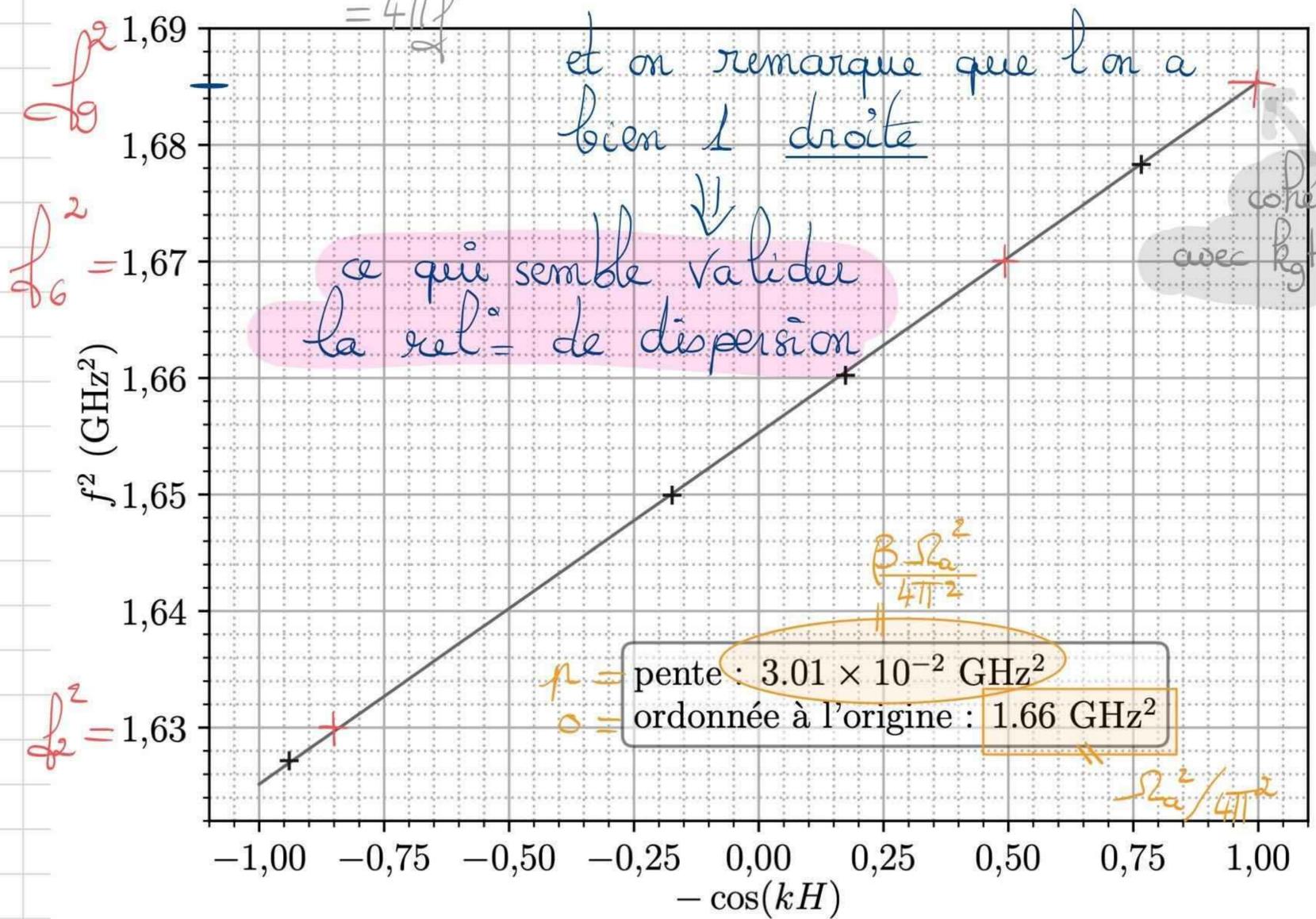


$f_9 = 1,2983 \text{ GHz}$

En poursuivant par ailleurs l'analogie mise en place, notons que l'on a:  $gH \leftrightarrow L$  et donc  $gH = i \times \frac{\Lambda_i}{2}$  avec  $\Lambda_i = \frac{2\pi}{k_i}$ , on obtient donc:  $k_i H = i \times \frac{\pi}{g}$

L'énoncé parle de  $kH$  et non  $k_i H$  (?)

Q23. Rappelons que la relation de dispersion précédemment trouvée donne  $\Omega^2 = \Omega_a^2 + \Omega_a^2 \beta \times (-\cos(kH))$



On note que  $\frac{p}{o} = \beta$   $1,81 \times 10^{-2}$

Commentaire?

Q24. On remarque que  $E$  évolue continuellement avec  $z$  et on a:  $E_g = -E_o \sin\left(\frac{k_g z}{g}\right) \sin(2\pi f_g t)$  et

"commence" par décroître.

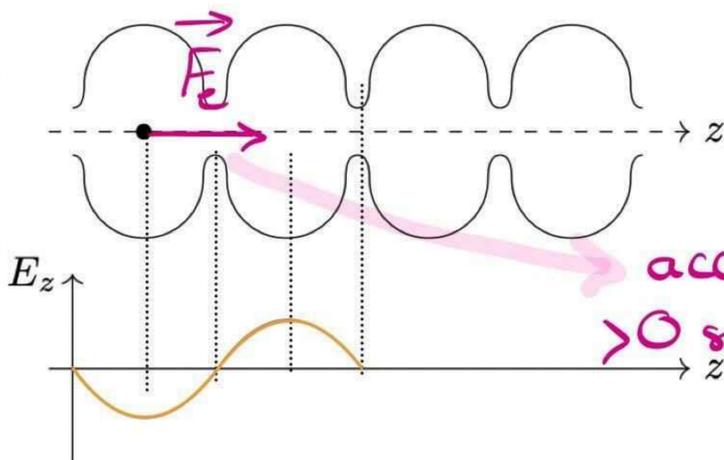
satisfait naturellement à la CL en  $x=0$

Notons que l'on a par ailleurs  $k_y H = \pi$ , ce qui donne :

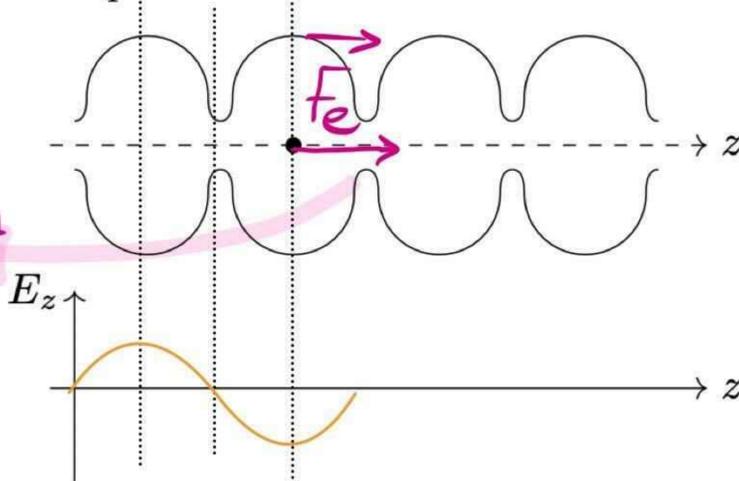
$$E_y = -E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \sin\left(2\pi \frac{z}{g} t\right)$$

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}$$

$$t = \frac{T}{4}$$



$$t = \frac{3T}{4}$$



$$E_y\left(z; \frac{T}{4}\right) = -E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \times \sin\left(2\pi \frac{z}{g} \times \frac{1}{4}\right)$$

$$E_y\left(z; \frac{3T}{4}\right) = -E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \times \sin\left(2\pi \frac{z}{g} \times \frac{3}{4}\right)$$

## Partie B - L'ondulateur

### I - Trajectoire des électrons

Q25.  $\bar{e}$  = relativiste

On utilise le théorème de la puissance cinétique :  $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \vec{F}_m \cdot \vec{v}$

avec  $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ . On a donc  $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 0$  :  $\mathcal{E}_c = \left( \gamma - 1 \right) mc^2$  et on a donc aussi

$$\gamma = \gamma_0$$

On rappelle que pour  $v \approx c$ , on a  $1 - \frac{v}{c} = \frac{1}{2\gamma^2}$  ; on a par conséquent  $v = c \gamma_0^{-2} = v_0$

Q26. Appliquons le principe fond<sup>al</sup> de la dynamique à  $\bar{e}$  ds réf<sup>er</sup> du labo supposé galiléen.

$$\frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{(on néglige le poids)}$$

Notons que à  $t=0$   $\vec{F}_m = -e v_0 \vec{e}_y \wedge B_0 \vec{e}_y$   
 et suivant  $\vec{e}_x$  : le mot va rester dans le plan  $(Oxz)$

$$\text{et } \vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z \quad v = \text{cte}$$

$$\begin{aligned} \text{(p.d.) } \cdot \vec{e}_z \text{ donne : } & \frac{d}{dt} (\gamma m \dot{z}) = -e B_0 \cos(k_u z) \dot{z} \quad \text{(Z)} \\ \text{(p.d.) } \cdot \vec{e}_x \text{ donne : } & \gamma m \ddot{x} = +e B_0 \cos(k_u z) \dot{z} \quad \text{(X)} \end{aligned}$$

Q27. on primitive la relation (X) :  $\gamma m \ddot{x} = e B_0 \times \frac{1}{k_u} \sin(k_u v_m t) + 0$   
 et en primitivant à nouveau, on obtient :  $\dot{x}(0) = 0$

$$\gamma m \dot{x} = -\frac{e B_0}{v_m k_u} \cos(k_u v_m t) + A$$

$$\text{On a } x(0) = 0 \text{ d'où } A = \frac{e B_0}{\gamma m v_m k_u} \text{ et } x(t) = \frac{e B_0}{\gamma m v_m k_u} (1 - \cos(k_u v_m t))$$

$$k = \frac{e B_0}{m e v_m k_u}$$

Q28. La relation (Z) donne alors  $\ddot{z} = -\left(\frac{e B_0}{\gamma m e}\right)^2 \times \frac{1}{k_u} \cos(k_u v_m t) \sin(k_u v_m t)$   
 et on primitive :

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{e B_0}{m e k_u}\right)^2 \times \frac{1}{\gamma^2 v_m} \cos(2k_u v_m t) + B$$

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{4} \frac{k^2}{\gamma^2} v_m \cos(2k_u v_m t) + B \quad \text{et on note que } B = \langle \dot{z}(t) \rangle$$

$$\text{à } t=0 \text{ on a } \dot{z}(0) = v_0 \text{ et } B = v_0 - v_m \times \frac{k^2}{4 \gamma^2}$$

$$\text{on a } v_m \left(1 + \frac{k^2}{4 \gamma^2}\right) = v_0 \text{ ou encore :}$$

$$v_m = \frac{v_0}{1 + \frac{k^2}{4 \gamma^2}} \approx v_0 \left(1 - \frac{k^2}{4 \gamma^2}\right) = B$$

et notons que  $\frac{k^2}{4 \gamma^2} v_m \approx v_0$  à l'ordre 1

On obtient alors la rel<sup>o</sup> fournie par l'énoncé:

$$\dot{z} = v_0 \left(1 - \frac{K^2}{4\gamma^2}\right) + \frac{K^2 v_0}{4\gamma^2} \cos(2k_u v_m t)$$

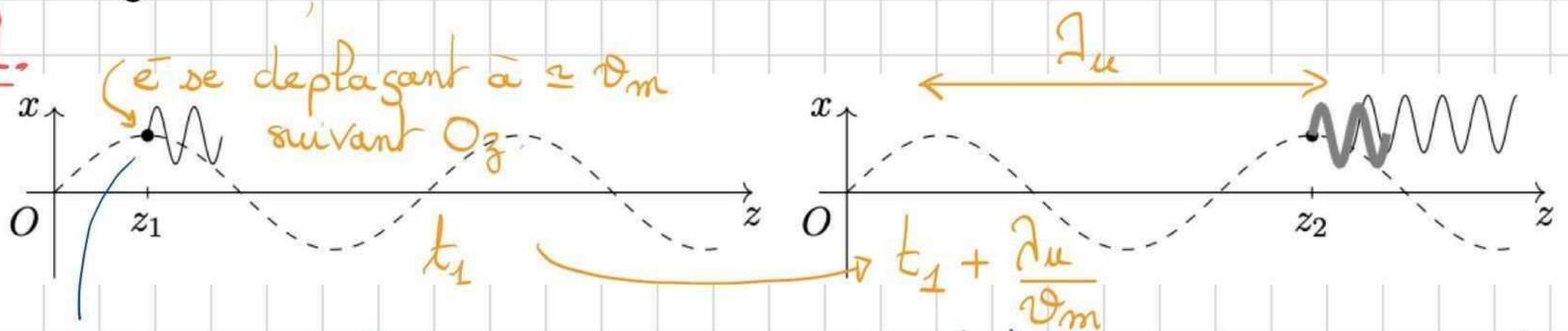
Q29. On a  $v_m = v_0 \left(1 - \frac{K^2}{4\gamma^2}\right)$  et on a  $E_c = (v_e = \frac{1}{2} m v_0^2)$  ce qui donne la rel<sup>o</sup> démontrée à la Q13.

$$1 - \frac{v_0}{c} = \frac{1}{2\gamma^2} \Rightarrow v_0 = c \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \text{ et on a: } v_m = c \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \left(1 - \frac{K^2}{4\gamma^2}\right)$$

Q30.  $k = \frac{eB_0}{m_e c k_u} = \frac{eB_0 \lambda_u}{2\pi m_e c}$  et  $B_0 = \frac{2\pi K m_e c}{e \lambda_u} = 0,54 T$   
très largement réalisable, avec, par ex, des électroaimants.

## II Rayonnement émis

31.



onde émise en  $z_1$  à  $t_1$ :

$$s(z_1; t_1) = S_0 \cos(\omega t_1 - k z_1)$$

$$s(z_2; t_2) = s\left(z_1; t_2 - \frac{z_2 - z_1}{v_m}\right)$$

L'onde émise en  $z_2$  à  $t_2$  est la même que

celle ayant été émise à  $t_1 = t_2 - \frac{z_2 - z_1}{v_m}$  en  $z_1$ .

$$s(z_2; t_2) = s\left(z_2 - \lambda_u; t_2 - \frac{\lambda_u}{v_m}\right)$$

On a donc, pour la source 2:

$$s(z_2; t_2) = S_0 \cos\left(\omega \left(t_2 - 1 \times \frac{\lambda_u}{v_m}\right) - k(z_2 - 1 \times \lambda_u)\right)$$

et en généralisant à la  $p$ <sup>ème</sup> source  $t_9$   $z_p - z_1 = p \lambda_u$ , on a

$$s_p(z; t) = S_0 \cos\left(\omega \left(t - p \frac{\lambda_u}{v_m}\right) - k(z - p \lambda_u)\right)$$

32. La forme  $\Gamma^{exe}$  associée à  $s$  est alors:  $\underline{s}_p = S_0 e^{i(\omega t - k z)} \times e^{i \psi_p}$

avec  $\mathcal{L}_p = -p \left( \frac{\lambda u}{v_m} \times d - \frac{K \lambda u}{c} \right) = -p \lambda u \left( \frac{1}{v_m} - \frac{1}{c} \right) = -p \times \frac{\lambda u}{c} \left( \frac{1}{v_m} - \frac{1}{c} \right)$

(propagation de l'onde électromagnétique dans le vide)

et on a :  $\vec{E}_{\text{tot}, N} = e^{i(\omega t - k z)} \times S_0 \sum_{p=0}^{N-1} e^{i \mathcal{L}_p}$  et on pose :  $S_{0,N} = \sum_{p=0}^{N-1} \left( e^{-i \mathcal{L}_p} \right)^p$

On a  $|S_{0,N}| = S_{0,N}$ , or  $S_{0,N} = \frac{1 - e^{-i N \mathcal{L}_u}}{1 - e^{-i \mathcal{L}_u}}$

suite géométrique de raison  $e^{-i \mathcal{L}_u}$  avec  $N$  termes.

d'où :  $S_{0,N} = \frac{e^{-i N \mathcal{L}_u / 2}}{e^{-i \mathcal{L}_u / 2}} \times \frac{\cancel{2i} \sin\left(\frac{N \mathcal{L}_u}{2}\right)}{\cancel{2i} \sin\left(\frac{\mathcal{L}_u}{2}\right)}$

Et par conséquent :

$$S_{0,N} = 1 \times \left| \frac{\sin\left(\frac{N d \lambda u}{2} \left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{c}\right)\right)}{\sin\left(\frac{d \lambda u}{2} \left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{c}\right)\right)} \right| \times S_0$$

33.  $S_{0,N} = \text{max}$  pour l'annulation du dénominateur (le numérateur s'annule alors aussi et  $S_{0,N} = N S_0$ ). Or le dénominateur s'annule pour

$\frac{d \lambda u}{2} \left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{c}\right) = q \pi$  d'où  $F_q = q \times \frac{1}{2 \lambda u} \times \frac{1}{\frac{1}{v_m} - \frac{1}{c}}$

avec  $v_m = c \left(1 - \frac{1}{2 \gamma^2}\right) \left(1 - \frac{K^2}{4 \gamma^2}\right)$

On a  $\frac{1}{v_m} = \frac{1}{c} \frac{1}{1 - \frac{1}{2 \gamma^2}} \times \frac{1}{1 - \frac{K^2}{4 \gamma^2}} \approx \frac{1}{c} \times \left(1 + \frac{1}{2 \gamma^2}\right) \left(1 + \frac{K^2}{4 \gamma^2}\right)$

et, à l'ordre 1 :  $\frac{1}{v_m} - \frac{1}{c} = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2 \gamma^2} - \frac{K^2}{4 \gamma^2}\right) = \frac{1}{c \times 2 \gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right)$

On a donc :

$$F_q = q \times \frac{c}{\lambda u} \times \frac{2 \gamma^2}{1 + \frac{K^2}{2}}$$

Q34.  $F_1 = \frac{c}{\lambda u} \times \frac{2 \gamma^2}{1 + \frac{K^2}{2}} = 5,78 \times 10^{18} \text{ Hz}$  et  $\lambda_1 = 52 \text{ nm}$

ce qui est bien 1  $f_q$  de rayons X

Q35. On a  $N = \frac{F_1}{\Delta F} = 667$  soit une densité linéique d'électrons = 3,81/m ou encore 1 électron ts les  $\approx 25$  cm : on ne retrouve pas  $\lambda_u$ !

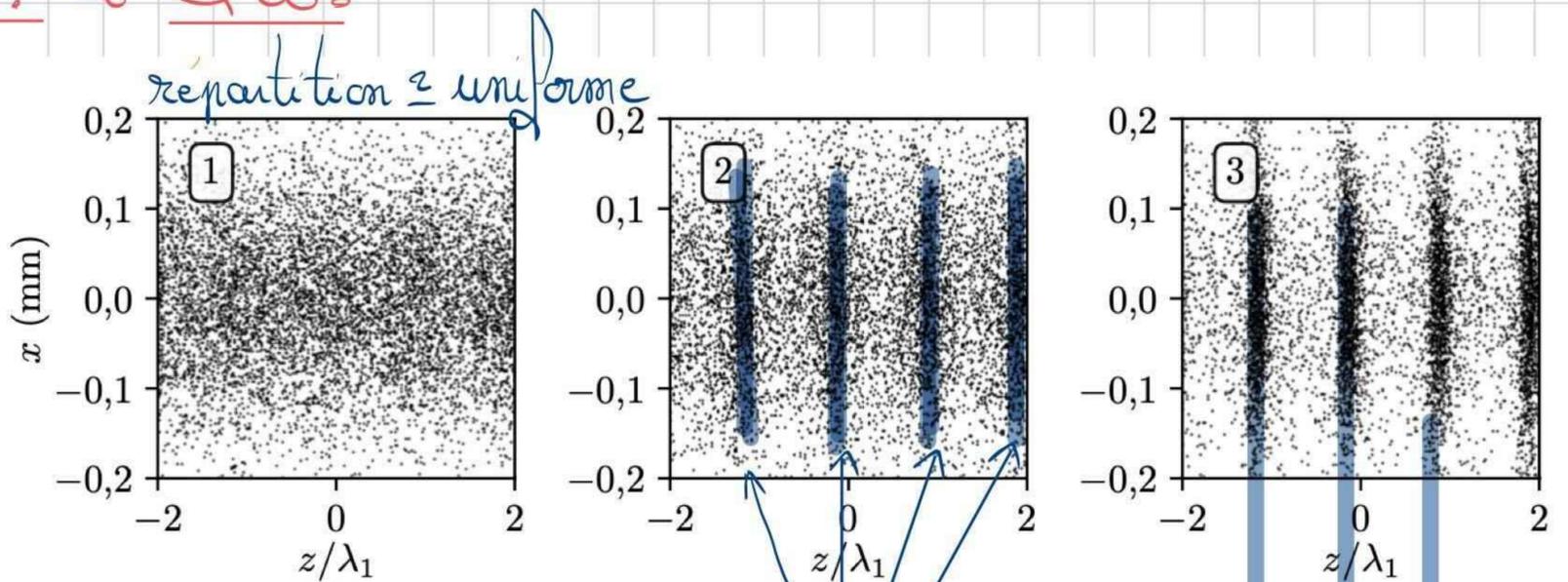
### III Influence de l'onde émise sur le mouvement

Q36. Partie  $\approx$  très confuse eq<sup>o</sup>  $\neq$  elle à résoudre mais qui ne serv pas ensuite -

$$\frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{\Delta t} = 2k_u c \eta_i$$

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta t} = -\frac{c^2}{2k_u c} \sin \frac{\Psi_i}{\lambda}$$

Q37.  $\approx$  Q38.



Le flux d' $e^-$  n'est plus vraiment continu -

La distribution n'est  $\oplus$  uniforme et c'est encore  $\oplus$  vrai à la sortie de l'onduleur : une forte densité d' $e^-$  ts les  $z = m \times \lambda_u$  : on va avoir 1 signal émis par ce paquet d' $e^-$  qui  $\approx$  impulsionnel.