

CCINP Physique PC 2025

Autour des générateurs thermoélectriques

Proposition de corrigé

Ce corrigé à été rédigé par David LASNE, en concertation avec Thierry FINOT. N'hésitez pas à me signaler par mail (david.lasne@ac-normandie.fr) toute coquille ou erreur. Vous pouvez le distribuer à vos élèves.

Partie I - L'effet Seebeck

I.1 - Découverte du phénomène

Q1. La loi d'OHM locale s'écrit $\vec{j}_{el} = \sigma \vec{E}$. Comme $\sigma > 0$, $\vec{E}$ est dans le sens de $\vec{j}_{el}$, donc selon $\vec{u}_x$.

Si la densité de courant est uniforme, le courant électrique qui traverse une section S vaut $I = \iint_S \vec{j}_{el} \cdot d\vec{S} = j_{el} \cdot S$. Par ailleurs, la tension entre les extrémités est $U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{j_{el}}{\sigma} L$.

On a donc $U = \frac{I}{\sigma S} L = R_{el} I$ avec $R = \frac{L}{S\sigma}$.

Q2. La loi de FOURIER s'écrit $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$.

L'analogie peut être faite avec $\vec{j}_{el} = \sigma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}(V)$. Ainsi, la température est l'analogie du potentiel, et le flux thermique

l'analogie du courant électrique. On peut donc écrire : $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$.

On peut aussi écrire que $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ le flux thermique de 1 vers 2 doit vérifier $T_1 - T_2 = R_{th} \Phi_{1 \rightarrow 2}$.

Q3. Partant de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}}(T)$, on intègre entre 0 et L :

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \alpha \int_1^2 \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot d\vec{\ell} = \alpha(T_2 - T_1)$$

$$e = V_1 - V_2 = -\alpha(T_1 - T_2)$$

Q4. Si $T_A > T_B$, l'agitation thermique est plus importante dans le compartiment A, donc $v_A > v_B$. Les électrons du côté A ont donc plus de chance de passer du côté B que l'inverse. La densité d'électron va donc diminuer côté A et augmenter côté B. Plus généralement, on s'attend donc à observer **un flux d'électrons opposé au gradient de température**, donc **une densité d'électrons d'autant plus faible que la température est élevée**.

Q5. Le champ électrique est orienté des zones positives (lacune d'électrons) vers les zones négatives (excès d'électrons), donc opposé au gradient de température. Ainsi, $\alpha < 0$.

Q6. L'analyse précédente n'est **pas compatible** avec une valeur de α positive comme pour le cuivre.

I.2 - Étude de l'expérience historique de Seebeck

Q7. Avec ce qui précède :

$$e_{Bi} = V_C - V_{C'} = -\alpha_{Bi}(T_C - T_{C'}) \Rightarrow e_{Bi} = -\alpha_{Bi}(T - T_0)$$

$$e_{Cu} = V_D - V_{D'} = -\alpha_{Cu}(T_D - T_{D'}) \Rightarrow e_{Cu} = -\alpha_{Cu}(T - T_0)$$

Q8. D'après les signes des coefficients de Seebeck, $e_{Bi} > 0$ et $e_{Cu} < 0$, avec $|e_{Bi}| > |e_{Cu}|$ donc le courant $I > 0$ circule dans le **sens trigonométrique**.

Q9. La loi des mailles et la loi d'Ohm (en négligeant la résistance du cuivre) donnent :

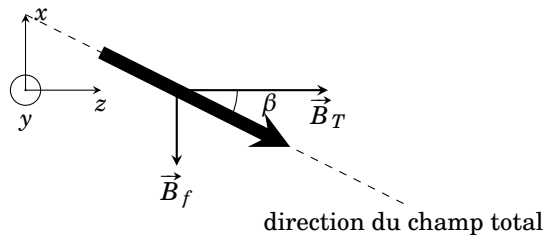
$$e_{Bi} - e_{Cu} - R_{Bi} I = 0 \Rightarrow I = \frac{S\sigma_{Bi}(\alpha_{Bi} - \alpha_{Cu})}{L}(T_0 - T)$$

Application numérique : $I = 6,4 \text{ A}$

Q10. D'après le cours (démonstration par théorème d'Ampère – demandée?), $\vec{B}_{f,Bi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$.

Q11. On somme les 2 contributions. On a dans les 2 cas $r = d/2$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_x$, donc $\vec{B}_f = -\frac{2\mu_0 I}{\pi d} \vec{u}_x$.

Q12. La situation vu de dessus est la suivante, sachant que l'aiguille aimantée s'aligne avec le champ résultant $\vec{B}_{tot} = \vec{B}_f + \vec{B}_T$:



Par trigonométrie, l'angle β vérifie $\tan \beta = \frac{\|\vec{B}_f\|}{\|\vec{B}_T\|}$ donc $\beta = \arctan \frac{B_f}{B_T}$.

Application numérique : $B_f = 1.10^{-4} \text{ T}$ donc $\beta = 1,4 \text{ rad} \approx 80^\circ$.

Partie II - Principe d'un générateur thermoélectrique

Q13. On réalise ici l'équivalent d'un moteur thermique qui fournit une puissance électrique ($\mathcal{P}_{el} < 0$) à partir de l'énergie thermique reçue d'une source chaude ($\mathcal{P}_C > 0$). Une partie de cette énergie est perdue, évacuée vers la source froide ($\mathcal{P}_F < 0$).

Le rendement est le rapport entre les puissances utile et onéreuse, soit $\eta = \left| \frac{\mathcal{P}_{el}}{\mathcal{P}_C} \right| = -\frac{\mathcal{P}_{el}}{\mathcal{P}_C}$.

Q14. Sur un cycle (entre t et $t + dt$), on a $dU = 0$ et $dS = 0$.

Or $dU = 0 = (\mathcal{P}_{el} + \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_F)dt$ d'après le premier principe soit $-\mathcal{P}_{el} = \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_F$ donc $\eta = 1 + \frac{\mathcal{P}_F}{\mathcal{P}_C}$.

Le second principe, $dS = \delta S_c + \delta S_e$ or l'entropie créée est positive, donc $\delta S_e \leq 0$.

On peut de plus écrire $\delta S_e = \frac{\delta Q_C}{T_C} + \frac{\delta Q_F}{T_F}$ ce qui donne $\frac{\mathcal{P}_C}{T_C} + \frac{\mathcal{P}_F}{T_F} \leq 0$ (inégalité de CLAUSIUS).

On en déduit en remplaçant dans l'expression du rendement que

$$\eta \leq \eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

avec égalité lorsque le cycle est réversible.

Q15. Les trous (positifs) se déplacent dans le sens du courant (donc vers le bas dans la jambe de droite, dopée p), tandis que les électrons vont dans le sens opposé (donc également vers le bas dans la jambe de gauche, dopée n).

On ne peut pas faire fonctionner un module avec des jambes constituées de semi-conducteurs de dopage de même type car cela obligerait des porteurs à aller dans la mauvaise direction par rapport au gradient de température.

Q16. Par définition, $I = \iint \vec{j}_{el} \cdot d\vec{S}$. Si $\vec{j}_{el}$ est uniforme, on a simplement $I = j_{el} \cdot S$ donc $\vec{j}_{el} = \frac{I}{S} \vec{u}_x$.

Q17. On fait un bilan thermique (1er ppe) entre les instants t et $t + dt$ pour la portion de jambe comprise entre les abscisses x et $x + dx$:

$$dU = \delta W + \delta Q$$

En régime stationnaire, $dU = U(t + dt) - U(t) = 0$, et comme le système est indéformable, $\delta W = 0$.

On a donc $\delta Q = \delta Q_{entrant \text{ en } x} - \delta Q_{sortant \text{ en } x+dx} + \delta Q_{créé} = 0$.

Par définition de la puissance volumique p_v , on a $\delta Q_{créé} = p_v S dx dt$.

Par définition du flux thermique, on a $\delta Q_{entrant \text{ en } x} = \Phi(x) dt = j_{th}(x) S dt$ car $\vec{j}_{th}$ est uniforme et orienté selon $\vec{u}_x$ sur toute la section, et de même en $x + dx$.

Finalement : $j_{th}(x) S dt - j_{th}(x + dx) S dt + p_v S dx dt = 0 \Rightarrow \frac{dj_{th}}{dx} = p_v$.

Q18. On sait que $p_v = \vec{j}_{el} \cdot \vec{E}$ donc on remplace $\vec{j}_{th}$ et $\vec{E}$ dans l'équation précédente :

$$\cancel{\alpha_p \frac{dT}{dx} j_{el}} - \lambda_p \frac{d^2 T}{dx^2} = j_{el} \left(\frac{j_{el}}{\sigma_p} + \cancel{\alpha_p \frac{dT}{dx}} \right)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\sigma_p \lambda_p S^2}$$

ce qui est la forme demandée avec $k = \frac{I^2}{\sigma_p \lambda_p S^2}$.

Q19. On intègre 2 fois : $T(x) = -k \frac{x^2}{2} + Ax + B$.

Avec les CL $T(0) = T_C$ et $T(L) = T_F$ on trouve $B = T_C$ et $A = k \frac{L}{2} + \frac{\Delta T}{L}$

$$T(x) = T_C + \frac{kx}{2}(L-x) - \Delta T \frac{x}{L}$$

Q20. La puissance thermique fournie par la source chaude à la jambe est $\mathcal{P}_{th,p}(x=0) = S \cdot j_{th}(x=0)$

$$\text{Or } j_{th} = \alpha_p j_{el} T(x) - \lambda_p \frac{dT}{dx} = \alpha_p j_{el} T(x) - \lambda_p \left(\frac{kL}{2} - kx - \frac{\Delta T}{L} \right)$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{P}_{th,p}(x=0) = S \cdot j_{th}(0) = \alpha_p I T_C - S \lambda_p \frac{kL}{2} + S \lambda_p \frac{\Delta T}{L}$$

On remplace k et on voit apparaître les résistances thermique et électrique :

$$\mathcal{P}_{th,p}(x=0) = \alpha_p I T_C - \frac{1}{2} R_{el,p} I^2 + \frac{\Delta T}{R_{th,p}}$$

Q21. La source chaude fournit :

$$\mathcal{P}_C = \mathcal{P}_{th,p}(x=0) + \mathcal{P}_{th,n}(x=0) = (\alpha_p - \alpha_n) I T_C + \frac{\Delta T}{R_{th,p}} + \frac{\Delta T}{R_{th,n}} - \frac{1}{2} (R_{el,p} + R_{el,n}) I^2$$

On pose $\alpha = \alpha_p - \alpha_n$, $R_{el,eq} = R_{el,p} + R_{el,n}$ et $\frac{1}{R_{th,eq}} = \frac{1}{R_{th,p}} + \frac{1}{R_{th,n}}$ et on obtient :

$$\mathcal{P}_C = \alpha I T_C + \frac{\Delta T}{R_{th,eq}} - \frac{1}{2} R_{el,eq} I^2$$

Q22. D'après le premier principe sur un cycle, $\mathcal{P}_C + \mathcal{P}_F + \mathcal{P}_{el} = 0$. En remplaçant, on trouve :

$$\mathcal{P}_{el} = -\alpha I \Delta T + R_{el,eq} I^2$$

Q23. La résistance reçoit $R_c I^2 = -\mathcal{P}_{el}$, on en extrait $I = \frac{\alpha \Delta T}{R_c + R_{el}}$.

Q24. La puissance électrique reçue par la charge est $\mathcal{P}_c = -\mathcal{P}_{el} = R_c I^2 = R_c \left(\frac{\alpha \Delta T}{R_c + R_{el}} \right)^2$.

On pose $x = \frac{R_c}{R_{el}}$ ce qui donne $\mathcal{P}_c(x) = \frac{x}{(1+x)^2} \left(\frac{\alpha \Delta T}{R_{el}} \right)^2$.

On étudie $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$. La dérivée est $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x)^4}$ qui s'annule en $x=1$. On vérifie que c'est un maximum, ainsi, la puissance est maximale pour $R_c = R_{el}$

Dans cette situation, $\mathcal{P}_{max} = \frac{(\alpha \Delta T)^2}{4R_{el}}$

Le nombre de modules à prévoir est $N = \frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_{max}} = \frac{4\mathcal{P}_m \frac{L}{S} \left(\frac{1}{\sigma_p} + \frac{1}{\sigma_n} \right)}{(\alpha \Delta T)^2}$

Application numérique : $N = 540$

Q25. On remarque que le rendement maximal augmente, à T_C donnée, lorsque le facteur de mérite $Z_{pm} T_m$ augmente.

Pour $T_C = 500^\circ \text{C}$, soit 773 K , avec un facteur de mérite de 1, on trouve un rendement maximal de l'ordre de 0,14 (14%).

Pour un moteur thermique idéal fonctionnant avec les mêmes sources, on aurait $\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C} \approx 0,61$, mais on sait qu'un moteur réel a plutôt un rendement de l'ordre de 0,3. Un générateur thermoélectrique a donc un très faible rendement.

Partie III - L'assistance gravitationnelle

III.1 - Généralités

Q27. La sonde n'est soumise, dans le référentiel "jupiterocentrique" $\mathcal{R}_j$ considéré galiléen, qu'à la force gravitationnelle exercée par Jupiter qui s'écrit $\vec{F} = -\mathcal{G}mM_J \frac{\vec{JP}}{JP^3}$. C'est une force centrale, son moment en J est donc nul : $\mathcal{M}_J(\vec{F}) = \vec{JP} \wedge \vec{F} = 0$ car les vecteurs sont colinéaires.

On applique le TMC à P : $\frac{d\vec{L}_J}{dt} = \mathcal{M}_J(\vec{F}) = 0$ donc le moment cinétique $\vec{L}_J$ est constant.

Si on note $\vec{u}_z$ la direction et $\vec{L}_J$, le mouvement est dans le plan orthogonal à $\vec{u}_z$ par définition du produit vectoriel ($\vec{L}_J = \vec{JM} \wedge m\vec{v}_{J(P)}$). En coordonnées polaires, $\vec{JM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v}_{J(P)} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ donc $\vec{L}_J = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$.

Comme $\vec{L}_J$ est constant, sa norme l'est aussi donc $r^2\dot{\theta} = C = \text{cste}$.

Q28. Par définition de l'énergie potentielle :

$$d\mathcal{E}_p = -\vec{F} \cdot d\vec{JP} = +\mathcal{G}mM_J \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \mathcal{E}_p = -\frac{\mathcal{G}mM_J}{r} + \text{cste}$$

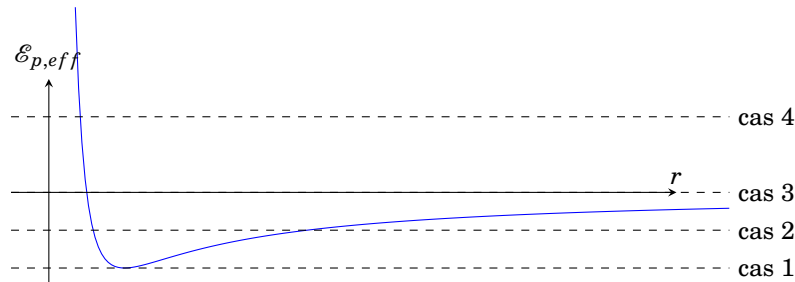
en prenant une énergie nulle à l'infini.

Q29. La seule force subie par la sonde est $\vec{F}$ qui est conservative. D'après le TEM, comme il n'y a **aucune force non conservative**, l'énergie mécanique est constante.

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{\mathcal{G}mM_J}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}(r)$$

en posant $\mathcal{E}_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}mM_J}{r}$.

Le tracé de $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ est le suivant :



Comme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$, on a nécessairement $\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{p,eff}(r)$. on représente la valeur de $\mathcal{E}_m$ en pointillés.

Dans le cas 1, une seule valeur de r est possible, c'est une trajectoire **circulaire** (état lié).

Dans le cas 2, r oscille entre 2 valeurs finies, c'est une trajectoire **elliptique** (état lié).

Le cas 3 est le cas limite d'une trajectoire **parabolique** ($\mathcal{E}_m = 0$, état libre, ou de diffusion).

Dans le cas 4, r va de l'infini à une valeur minimale, c'est une trajectoire **hyperbolique** (état libre, ou de diffusion).

Q30. Pour que la sonde puisse se libérer et partir à l'infini, l'énergie minimale à lui communiquer est celle correspondant à la trajectoire parabolique, donc $\mathcal{E}_m = 0$. Ainsi,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mM_J}{r} \geq 0 \Rightarrow v \geq v_\ell = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_J}{r}}$$

III.2 - Sphère de Hill de Jupiter

Q31. On applique la seconde loi de NEWTON à Jupiter, dans le référentiel héliocentrique. La seule force est la force gravitationnelle exercée par le Soleil. La trajectoire est circulaire de rayon d , donc en projection sur l'axe radial, on a :

$$-M_J d\Omega^2 = -\mathcal{G} \frac{M_J M_S}{d^2} \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{d^3}} \text{ et } V_{J,h} = d\Omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{d}}$$

Application numérique : $V_{J,h} = 13 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

Q32. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en **rotation** par rapport à $\mathcal{R}_h$, supposé galiléen. Il n'est donc **pas galiléen**.

Q33. Au bilan des forces, on tient compte des forces gravitationnelles et des "forces" d'inertie :

- Attraction due au Soleil : $\vec{F}_S = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{(d-r)^2} \vec{u}_x'$

- Attraction due à Jupiter : $\vec{F}_J = +\mathcal{G} \frac{mM_J}{r^2} \vec{u}_x'$
- "Force" d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = +m\Omega^2(d-r)\vec{u}_x' = +\mathcal{G} \frac{mM_S(d-r)}{d^3} \vec{u}_x'$
- "Force" d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = 0$ car la sonde est immobile dans ce référentiel.

Q34. A l'équilibre, la somme des forces est nulle :

$$-\mathcal{G} \frac{mM_S}{(d-r)^2} + \mathcal{G} \frac{mM_J}{r^2} + \mathcal{G} \frac{mM_S(d-r)}{d^3} = 0$$

On simplifie par $m\mathcal{G}$ et on multiplie par $r^2 d^3 (d-r)^2$ pour obtenir :

$$-M_S d^3 r^2 + M_J d^3 (d-r)^2 + M_S (d-r)^3 r^2 = 0 \Rightarrow \boxed{M_J d^3 (d-r)^2 = M_S r^2 (d^3 - (d-r)^3)}$$

Pour faire le DL, on divise d'abord par d^5 :

$$M_J \left(1 - \frac{r}{d}\right)^2 = M_S \frac{r^2}{d^2} \left(1 - \left(1 - \frac{r}{d}\right)^3\right)$$

$$M_J \left(1 - \frac{2r}{d}\right) = M_S \frac{r^2}{d^2} \left(1 - \left(1 - \frac{3r}{d}\right)\right)$$

Au premier ordre non nul, il ne reste que :

$$M_J \approx M_S \frac{r^2}{d^2} \frac{3r}{d} \Rightarrow \boxed{r = r_H = d \sqrt[3]{\frac{M_J}{3M_S}}}$$

Application numérique : $r_H = 5,3 \cdot 10^7 \text{ km}$

III.3 - Principe de l'assistance gravitationnelle

Q35. La seule force en présence est la force d'attraction gravitationnelle qui est conservative et dont l'énergie potentielle ne dépend que de la distance à J . On a donc d'après le Théorème de l'Énergie Mécanique :

$$\mathcal{E}_{m,e} = \mathcal{E}_{m,s} \text{ avec } \mathcal{E}_{p,e} = \mathcal{E}_{p,s} = -\frac{\mathcal{G}mM_J}{r_H}$$

On en déduit que l'énergie cinétique est conservée également : $\mathcal{E}_{c,e} = \mathcal{E}_{c,s} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{e,j} = \vec{v}_{s,j} = \vec{v}_j}$.

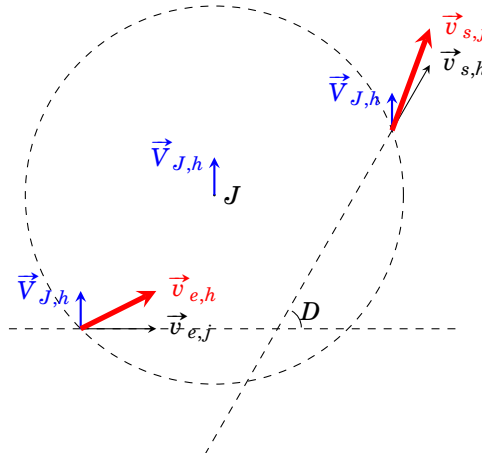
Q36. La sonde arrive de l'infini et repart à l'infini, elle est donc dans un état de diffusion, donc sa vitesse est par définition supérieure à v_ℓ .

Application numérique : $v_\ell = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_J}{r_H}} = 2,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} < v_j$

Q37. On utilise la loi de composition des vitesses dans le cadre d'un référentiel en translation par rapport à un autre avec la vitesse d'entraînement $\vec{V}_{J,h}$. On a donc $\boxed{\vec{v}_{e,h} = \vec{v}_{e,j} + \vec{V}_{J,h}}$ et $\boxed{\vec{v}_{s,h} = \vec{v}_{s,j} + \vec{V}_{J,h}}$.

Q38. Les normes des vitesses additionnées sont les mêmes, mais l'angle diminue entre elles donc la somme augmente : la vitesse en sortie est plus grande qu'en entrée.

Dans le cas présent ($\vec{V}_{J,h} \perp \vec{v}_{e,j}$), l'effet sera maximal pour $D = 90^\circ$, ainsi $\vec{V}_{J,h}$ et $\vec{v}_{s,h}$ sont colinéaires.



Q39. On exprime la norme de la somme des vecteurs (en projetant $\vec{v}_{s,j}$) :

$$v_{e,h} = \sqrt{V_{J,h}^2 + v_{e,j}^2}$$

$$\vec{v}_{s,j} = v_{s,j} \cos D \vec{u}_x + v_{s,j} \sin D \vec{u}_y \Rightarrow v_{s,h} = \sqrt{(v_{s,j} \cos D)^2 + (V_{J,h} + v_{s,j} \sin D)^2}$$

Q40. *Application numérique* : $v_{e,h} = 16 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_{s,h} = 22 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ donc $\Delta v_h = 6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\Delta \mathcal{E}_{c,h} = 81.10^9 \text{ J}$
Le gain d'énergie vient du travail de la force gravitationnelle exercée par Jupiter.

Q41. L'assistance gravitationnelle est beaucoup plus efficace que les propulseurs.

***** FIN DU CORRIGE *****