

Correction TD ondes em dans le vide

I. Equations de Maxwell locales

1. Dans le vide on doit avoir d'après l'équation de Maxwell Gauss: $\text{div} \vec{E} = 0$.

On calcule donc $\text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z) \cdot E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_x = \frac{\partial}{\partial x} (E_0 \cos(\omega t + kz)) = 0$: c'est conforme à Maxwell Gauss.

Remarque: dans le cours on a vu que l'équation de Maxwell Gauss sert à montrer que le champ électrique est transverse: c'est bien le cas ici puisque l'onde se propage selon $-Oz$ et est polarisée selon Ox .

C'est l'équation de Maxwell Faraday qui permet de trouver le champ magnétique à partir du champ électrique soit $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Pour une OPPH cette équation est équivalente à $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ avec ici $\vec{k} = \frac{\omega}{c}(-\vec{e}_z)$ soit $\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{e}_y$.

On calcule le vecteur de Poynting: $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + kz) \vec{e}_z$.

Sa valeur moyenne par rapport au temps $\langle \vec{R} \rangle = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z$: le vecteur de Poynting est selon la direction et le sens de propagation de l'onde soit ici selon $-Oz$.

2. Cette onde est une OS. On applique l'équation de Maxwell Ampère dans le vide $\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

$\text{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = (\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z) \wedge B_0 \cos(\frac{\pi x}{a}) \sin(\omega t) \vec{e}_y = -\frac{B_0 \pi}{a} \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\omega t) \vec{e}_z$.

Soit $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{B_0 c^2 \pi}{a} \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\omega t) \vec{e}_z$. On primitive par rapport au temps (la constante d'intégration est nulle car les constantes ne se propagent pas): $\vec{E} = \frac{B_0 c^2 \pi}{a \omega} \sin(\frac{\pi x}{a}) \cos(\omega t) \vec{e}_z$.

On calcule le vecteur de Poynting: $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{B_0^2 c^2 \pi}{a \omega} \cos(\frac{\pi x}{a}) \sin(\omega t) \sin(\frac{\pi x}{a}) \cos(\omega t) \vec{e}_x$.

Sa valeur moyenne par rapport au temps est nul car $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$. C'est tout à fait cohérent car une onde stationnaire ne se propage pas donc l'énergie ne se propage pas non plus.

II. Onde émise par un laser

1. A retenir: l'intensité est égale à la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting (ou alors à la norme de la moyenne du vecteur de Poynting). C'est une puissance surfacique soit la puissance transportée par l'onde divisée par la surface traversée par l'onde. Ici $I = \frac{P}{\pi(d/2)^2} = 1,28.10^5 \text{ W/m}^2$.

2. Une OPPH qui se propage selon OZ polarisée selon Oy s'écrit $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$.

On en déduit le champ magnétique par $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ avec ici $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z$ soit $\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{e}_x$.

On en déduit le vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = +\frac{E_0^2}{c \mu_0} \cos^2(\omega t - kz) \vec{z}$ et sa valeur moyenne par rapport au temps $\langle \vec{R} \rangle = +\frac{E_0^2}{2c \mu_0} \vec{z}$.

Ainsi on a $I = \frac{E_0^2}{2c \mu_0} = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$ car $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$.

Donc $E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} = 9,8 \text{ kV.m}^{-1}$.

III. Onde em dans le vide

1. Le terme $\omega t - \alpha x$ montre que l'onde se propage selon $+Ox$.

y et t ne sont pas dans le même terme c'est une OS selon Oy .

Ce n'est pas une onde plane car elle dépend de deux variables d'espace en cartésiennes.

2. L'équation de propagation du champ électrique dans le vide est l'équation de d'Alembert de la forme

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

$$\text{avec } \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -\beta^2 \vec{E} - \alpha^2 \vec{E}$$

$$\text{avec } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

En remplaçant dans l'équation de propagation on a $-\alpha^2 - \beta^2 - \frac{(-\omega^2)}{c^2} = 0$ soit $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

3. On ne peut pas appliquer $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ car l'onde n'est pas une OPPH. On doit appliquer $\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

On a donc $\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \wedge E_0 \sin(\beta y) \cos(\omega t - \alpha x) \vec{e}_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (E_0 \sin(\beta y) \cos(\omega t - \alpha x)) \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z + \frac{\partial}{\partial y} (E_0 \sin(\beta y) \cos(\omega t - \alpha x)) \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z$$

$$= -E_0 \alpha \sin(\beta y) \sin(\omega t - \alpha x) \vec{e}_y + E_0 \beta \cos(\beta y) \cos(\omega t - \alpha x) \vec{e}_x$$

$$\text{D'où } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{rot} \vec{E} = +E_0 \alpha \sin(\beta y) \sin(\omega t - \alpha x) \vec{e}_y - E_0 \beta \cos(\beta y) \cos(\omega t - \alpha x) \vec{e}_x$$

On primitive par rapport au temps (la constante d'intégration est nulle car les constantes ne se propagent pas):

$$\vec{B} = -\frac{E_0 \alpha}{\omega} \sin(\beta y) \cos(\omega t - \alpha x) \vec{e}_y - \frac{E_0 \beta}{\omega} \cos(\beta y) \sin(\omega t - \alpha x) \vec{e}_x$$

4. On en déduit le vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$$= +\frac{E_0^2 \alpha}{\mu_0 \omega} \sin^2(\beta y) \cos^2(\omega t - \alpha x) \vec{e}_x - \frac{E_0^2 \beta}{\mu_0 \omega} \cos(\beta y) \sin(\beta y) \cos(\omega t - \alpha x) \sin(\omega t - \alpha x) \vec{e}_y$$

On en prend la valeur moyenne par rapport au temps avec $\langle \cos^2(\omega t - \alpha x) \rangle = \frac{1}{2}$ et $\langle \cos(\omega t - \alpha x) \sin(\omega t - \alpha x) \rangle = 0$

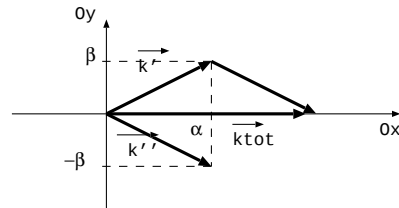
Soit $\langle \vec{R} \rangle = +\frac{E_0^2 \alpha}{2\mu_0 \omega} \sin^2(\beta y) \vec{e}_x$: c'est cohérent de trouver la moyenne du vecteur de Poynting selon Ox car l'onde étudiée se propage selon Ox et ne se propage pas selon Oy . Et le vecteur de Poynting est dans le sens et la direction de l'onde puisque l'énergie se propage dans le sens et la direction de l'onde.

5. On applique la formule de trigo donnée:

$$\vec{E} = E_0 \sin(\beta y) \cos(\omega t - \alpha x) \vec{e}_z$$

$$= \frac{E_0}{2} (\sin(\omega t - \alpha x + \beta y) + \sin(\omega t - \alpha x - \beta y)) \vec{e}_z$$

Le terme de phase $\omega t - \alpha x + \beta y$ correspond à une OPPH de vecteur d'onde $\vec{k}^H = \alpha \vec{e}_x - \beta \vec{e}_y$ et le terme de phase $\omega t - \alpha x - \beta y$ correspond à une OPPH de vecteur d'onde $\vec{k}^J = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y$. L'onde est la somme de deux OPPH de vecteurs d'onde $\vec{k}^J$ et $\vec{k}^H$. On a $\vec{k}^J + \vec{k}^H = 2\alpha \vec{e}_x$: donc l'onde résultante est bien une onde qui se propage selon Ox .



IV. CCINP TPC 2025

1. Les variables d'espace et de temps ne sont pas dans le même terme donc c'est un OS.

Il n'y a qu'une variable d'espace en coordonnées cartésiennes donc c'est une onde plane.

L'onde est harmonique et elle est polarisée selon Oz .

2. Dans le métal le champ électrique est nul. Les dioptries métal-vide sont des plans parallèles à Oyz et le champ électrique est selon Oz donc le champ électrique est contenu dans le dioptrie, c'est ce que l'on appelle une composante tangentielle (par opposition à une composante normale au dioptrie qui serait perpendiculaire au dioptrie soit selon Ox).

Le champ électrique sur les dioptries est continu soit:

en $x = 0$: $\vec{E}_{vide}(x = 0) = \vec{E}_{metal}(x = 0)$ d'où $E_0 \cos(\omega t) \cos(\phi) = 0$ donc $\phi = \pi/2$.

en $x = d_x$: $\vec{E}_{vide}(x = d_x) = \vec{E}_{metal}(x = d_x)$ d'où $E_0 \cos(\omega t) \cos(kd_x + \frac{\pi}{2}) = 0$ soit $\cos(kd_x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(kd_x) = 0$ donc $knd_x = n\pi$ avec n entier.

On a donc $k_n = \frac{n\pi}{d_x} = \frac{\omega_n}{c}$ (relation de dispersion dans le vide) soit $\omega_n = \frac{n\pi c}{d_x}$.

3. On ne peut pas appliquer $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ car l'onde n'est pas une OPPH. On doit appliquer $\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

On a donc $\vec{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$

$$= (\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z) \wedge E_0 \sin(kx + \pi/2) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} (E_0 \sin(kx + \pi/2) \cos(\omega t)) \vec{e}_y$$

$$= -E_0 k \cos(kx + \pi/2) \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

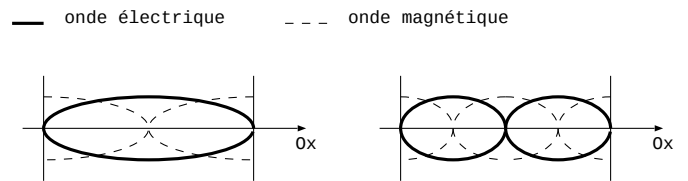
$$\text{On a donc } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{rot} \vec{E} = E_0 k \cos(kx + \pi/2) \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

On primitive par rapport au temps (la constante d'intégration est nulle car les constantes ne se propagent pas):

$$\vec{B} = \frac{E_0 k}{\omega} \cos(kx + \pi/2) \sin(\omega t) \vec{e}_y \text{ (on peut remplacer } \frac{k}{\omega} \text{ par } \frac{1}{c} \text{ car on est dans le vide)}$$

4. On calcule le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne est nulle ce qui est cohérent avec le fait que l'onde est stationnaire.

5. L'onde magnétique et l'onde électrique sont en quadrature de phase temporelle et spatiale donc un noeud de champ magnétique est un ventre de champ électrique et réciproquement. Sur les dioptries on a des noeuds de champ électrique donc des ventres de champ magnétique.



On retrouve cette propriété sur les ondes de vitesse et de surpression pour les ondes stationnaires sonores ainsi que sur les ondes de tension et de courant dans un câble coaxial.

V. E3A PC 2025

1. Dans le vide on a $E_0 = B_0 c$ qui vient de la relation de Maxwell Ampère dans le vide $\vec{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ qui donne $\vec{E} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{B}}{c}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans le sens et la direction de propagation.

2. Dans le vide, le champ électrique résultant est $\vec{E}_{vide} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) \vec{e}_y = -2E_0 \sin(\omega t) \sin(-kx) \vec{e}_y = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$.

Dans le vide, le champ magnétique résultant est $\vec{B}_{vide} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = B_0(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) \vec{e}_z = 2B_0 \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$.

Le champ électromagnétique résultant est caractéristique d'une OS. Les noeuds de champ électrique corre-

spondent à des ventres de champ magnétique car les OS sont en quadrature spatiale.

3. L'équation locale de Maxwell Ampère dans le métal (soit pour l'onde transmise) s'écrit $\vec{\text{rot}} \vec{B}_t = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$ soit dans l'ARQS $\vec{\text{rot}} \vec{B}_t = \mu_0 \vec{j}$.

Avec $\vec{\text{rot}} \vec{B}_t = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x \Lambda B_t(x, t) \vec{e}_z = -\frac{\partial B_t}{\partial x} \vec{e}_y = \mu_0 \vec{j}$ donc le vecteur densité de courant dans le métal s'écrit $\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_t}{\partial x} \vec{e}_y$.

Le flux du vecteur densité de courant à travers la surface $dx dz \vec{e}_y$ conduit au courant d'intensité élémentaire $di = j dx dz = -\frac{dx dz}{\mu_0} \frac{\partial B_t}{\partial x}$.

4. La force de Laplace qui s'exerce sur un élément de conducteur $dy \vec{e}_y$ parcouru par le courant di et plongé dans le champ magnétique $B_t \vec{e}_z$ s'écrit $d\vec{F} = di dy \vec{e}_y \Lambda B_t \vec{e}_z = di dy B_t \vec{e}_x = -\frac{dx dy dz}{\mu_0} \frac{\partial B_t}{\partial x} B_t \vec{e}_x$.

5. On intègre sur toute la longueur du pavé soit entre $x = 0$ et $x \rightarrow \infty$ pour avoir la force résultante sur la section $dy dz$: $d\vec{F}_{pave} = -\frac{dy dz}{\mu_0} \int_0^\infty \frac{\partial B_t}{\partial x} B_t dx \vec{e}_x = -\frac{dy dz}{\mu_0} \vec{e}_x \int_0^\infty B_t dB_t = -\frac{dy dz}{\mu_0} \vec{e}_x \left[\frac{B_t(x, t)^2}{2} \right]_0^\infty = -\frac{dy dz}{2\mu_0} \vec{e}_x (B_t(\infty, t) - B_t(0, t)) = \frac{dy dz}{\mu_0} 2B_0^2 \cos^2(\omega t) \vec{e}_x$.

La valeur moyenne de $\cos^2(\omega t)$ est $1/2$ donc $\langle d\vec{F}_{pave} \rangle = \frac{dy dz}{\mu_0} B_0^2 \vec{e}_x$.

6. On en déduit la pression de radiation $P_{rad} = \frac{\| \langle d\vec{F}_{pave} \rangle \|}{dy dz} = \frac{B_0^2}{\mu_0}$.

7. La densité d'énergie électromagnétique de l'onde dans le vide est $u_{em} = \frac{\epsilon_0 E_{vide}^2}{2} + \frac{B_{vide}^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E_0^2 2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kx) + \frac{B_0^2}{\mu_0} 2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kx) = \frac{B_0^2}{\mu_0} 2 (\cos^2(\omega t) \cos^2(kx) + \sin^2(\omega t) \sin^2(kx))$ car $\epsilon_0 E_0^2 = \epsilon_0 B_0^2 c^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0}$.

On en prend la valeur moyenne par rapport au temps: $\langle u_{em} \rangle = \frac{B_0^2}{\mu_0} 2 \left(\frac{1}{2} \cos^2(kx) + \frac{1}{2} \sin^2(kx) \right) = \frac{B_0^2}{\mu_0} = P_{rad}$.

8. La quantité de mouvement d'un photon est $\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{u} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire selon le sens et la direction du photon.

Le photon incident se déplace selon $+\vec{e}_x$, il a pour quantité de mouvement $\vec{p}_i = +\frac{h\nu}{c} \vec{e}_x$.

Le photon réfléchi se déplace selon $-\vec{e}_x$ et a la même longueur d'onde soit la même fréquence que le photon incident, il a pour quantité de mouvement $\vec{p}_r = -\frac{h\nu}{c} \vec{e}_x$.

La variation de quantité de mouvement d'un photon est donc $\Delta \vec{p} = \vec{p}_r - \vec{p}_i = -2\frac{h\nu}{c} \vec{e}_x$.

9. Les photons se déplacent à la vitesse c et parcourent donc la distance cdt entre les instants t et $t + dt$.

Les photons qui frappent la surface S entre t et $t + dt$ sont contenus à l'instant t dans le volume de section S et de longueur cdt . Il y a $nScdt$ photons dans ce volume.

Donc entre les instants t et $t + dt$, la variation de la quantité de mouvement total est $\Delta p_t = nScdt \left(-2\frac{h\nu}{c} \vec{e}_x \right) = -2h\nu nSdt \vec{e}_x$.

On applique la RFD aux photons qui se réfléchissent sur la surface S entre t et $t + dt$: $\frac{\Delta p_t}{dt} = \vec{F}_{S/photons} = -2h\nu nS \vec{e}_x$: c'est la force exercée par la surface S sur les photons.

On en déduit donc la force exercée par les photons sur la surface S : $\vec{F}_{photons/S} = -\vec{F}_{S/photons} = 2h\nu nS \vec{e}_x$.

D'où la pression de radiation $P_{rad} = \frac{F}{S} = 2n h \nu$.