

I. Exercice II: Propagation dans un conducteur ohmique

1. On applique l'équation de Maxwell Gauss et l'équation de conservation de la charge: $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

On écrit également la loi d'Ohm local $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

On en déduit l'équation différentielle $\frac{d\rho}{dt} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$. La solution est de la forme $\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \approx 10^{-19} \text{ s}$.

Cela signifie que pour un temps de l'ordre de 5τ la densité volumique de courant est nulle. Ainsi pour $T \gg 5\tau$, on peut dire que $\rho = 0$ à tout instant. Cela correspond à $f = \frac{1}{T} \ll \frac{1}{5\tau} \approx 2.10^{18} \text{ Hz}$.

2. On écrit $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ soit en remplaçant avec les équations de Maxwell on a:

$$\text{rot}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} - \Delta \vec{E}.$$

L'équation de propagation est donc $\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$.

Pour $\gamma = 0$, on est dans le vide et on retrouve une équation de propagation de la forme de d'Alembert avec $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ pour célérité des ondes.

On remplace la solution proposée $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ dans l'équation de propagation en notation complexe.

$$\text{On a } \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -\underline{k}^2 \vec{E}$$

$$\text{On a } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$$

$$\text{On a } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

$$\text{On obtient donc } \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0 \gamma \omega.$$

3. On cherche à simplifier la somme dans $\underline{k}^2$ donc pour cela on compare les deux termes qui interviennent dans la somme, on en fait le rapport: $\frac{\frac{\omega^2}{c^2}}{\mu_0 \gamma \omega} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma} = \frac{\epsilon_0 2\pi f}{\gamma} = \frac{\epsilon_0 2\pi c}{\lambda \gamma} \approx \frac{10^{-11} \cdot 2\pi \cdot 10^8}{6.10^{-7} \cdot 10^8} \approx 0,1 \ll 1$.

$$\text{On a donc } \underline{k}^2 \approx -i\mu_0 \gamma \omega = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma \omega \text{ soit } \underline{k} = e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \frac{1-i}{\delta} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Le vecteur d'onde comprend une partie réelle donc il y a propagation et une partie imaginaire donc il y a absorption.

On en déduit le champ électrique réel en prenant la partie réelle du champ électrique en notation complexe soit:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \vec{e}_x \mathcal{R}e(e^{i(\omega t - \frac{1-i}{\delta} z)}) \\ &= E_0 \vec{e}_x \mathcal{R}e(e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{z}{\delta})}) \\ &= E_0 \vec{e}_x e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta}). \end{aligned}$$

Le terme de phase $\omega t - \frac{z}{\delta}$ montre qu'il y a propagation selon $+Oz$

Le terme $e^{-z/\delta}$ montre que l'amplitude de l'onde diminue quand l'onde se propage: il y a absorption.

δ s'appelle l'épaisseur de peau, c'est une distance, c'est la distance sur laquelle se propage l'onde avant d'être absorbée par le milieu.

$$4. \text{ AN: pour les ondes visibles: } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 3.10^8}{6.10^{-7}} = 3.10^{15} \text{ rad/s}.$$

$$\text{AN: } \delta = \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 \cdot 3.10^{15}}} = 10^{-8} \text{ m: l'onde ne pénètre quasiment pas dans le métal.}$$

II. Exercice III: conductivité d'un métal

1. La force a pour origine les interactions, soit les chocs, des électrons avec les autres électrons et avec les cations du réseau. τ est un temps, c'est le temps moyen entre deux chocs. Plus ce temps est grand, moins il y a de chocs et plus la force est faible.

2. Le rapport entre la force magnétique et la force électrique est $\frac{q||\vec{V}\wedge\vec{B}||}{q||\vec{E}||} = \frac{VB}{E} = \frac{V}{c} \ll 1$ en prenant comme hypothèse que la vitesse d'un électron est négligeable devant la vitesse de la lumière (ce qui est le cas en mécanique non relativiste!).

RFD appliquée à un électron: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v}\wedge\vec{B} + m\vec{g} - \frac{m}{\tau}\vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$.

Soit en régime forcé (en notation complexe) : $m(-i\omega)\vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$ donc $\vec{v} = \frac{\frac{-e\tau}{1-i\omega\tau}\vec{E}}$ et par suite

$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{\frac{ne^2\tau}{1-i\omega\tau}\vec{E}}$: loi d'ohm locale où $\frac{\frac{ne^2\tau}{1-i\omega\tau}}$ désigne $\underline{\gamma}$ la conductivité qui ici est complexe.

Par identification avec l'énoncé on a $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1-i\omega\tau}$ où γ_0 représente la conductivité en régime permanent.

AN: $\tau = \frac{m\gamma_0}{ne^2} = \frac{10^{-31}.6.10^7}{10^{29}.10^{-38}} = 6.10^{-15} \text{ s}$.

3. **3.a.** Pour $\underline{\gamma}$: on compare les termes dans la somme au dénominateur de $\underline{\gamma}$ soit on compare 1 et $\omega\tau = 2\pi f\tau = 2\pi.20.10^3.6.10^{-15} \ll 1$ donc on néglige $\omega\tau$ devant 1 et $\underline{\gamma} \approx \gamma_0$.

Dans l'équation de Maxwell Ampère: $\vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\gamma_0\vec{E} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. On compare les courants de conduction ($\vec{j} = \gamma\vec{E}$) et le courant de déplacement ($\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$) en faisant leur rapport:

$\frac{\gamma_0 E}{\epsilon_0\omega E} = \frac{\gamma_0}{2\pi f\epsilon_0} = \frac{6.10^7}{2\pi.20.10^3.10^{-31}} \gg 1$. Donc on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction. On a $\vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\gamma_0\vec{E}$.

3.b. On écrit $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$ soit en remplaçant avec les équations de Maxwell on a:

$$\vec{\text{rot}}(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\gamma_0\vec{E}) = -\mu_0\gamma_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0} - \Delta\vec{E}.$$

L'équation de propagation est donc $\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. C'est une équation de diffusion, qui traduit un phénomène irréversible, avec pour coefficient de diffusion $D = \frac{1}{\mu_0\gamma_0}$.

$$\textbf{3.c.} \quad D \text{ s'exprime en } m^2.s^{-1} \text{ donc } \delta = \sqrt{D.temps} = \sqrt{\frac{D}{f}} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\gamma_0 f}}.$$

III. Exercice V: Plasma sans collisions

1. On écrit que la densité volumique de charges est nulle soit $\rho = n_e(-e) + n_c(Ze) = 0$.

2. Le rapport entre la force magnétique et la force électrique est $\frac{q||\vec{V}\wedge\vec{B}||}{q||\vec{E}||} = \frac{VB}{E} = \frac{V}{c} \ll 1$ en prenant comme hypothèse que la vitesse d'un électron est négligeable devant la vitesse de la lumière (ce qui est le cas en mécanique non relativiste!).

3. RFD appliquée à un électron: $m_e\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v}\wedge\vec{B} + m_e\vec{g} = -e\vec{E}$.

Soit en régime forcé (en notation complexe) : $m_e i\omega\vec{v} = -e\vec{E}$ donc $\vec{v} = \frac{-e}{i\omega m_e}\vec{E}$ et par suite $\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2}{i\omega m_e}\vec{E}$: on reconnaît la loi d'ohm locale avec $\underline{\gamma} = \frac{ne^2}{i\omega m_e}$ désigne la conductivité qui ici est complexe.

Remarque: on néglige les cations car ils sont très lourds par rapport aux électrons donc le champ électrique

a du mal à les mettre en mouvement. Si on tient compte des cations, par analogie on a $\underline{v}_c = \frac{+Ze}{i\omega m_c} \underline{E}$ et

donc $\underline{j} = (\frac{n_e e^2}{i\omega m_e} + \frac{n_c Z^2 e^2}{i\omega m_c}) \underline{E}$.

4. La puissance volumique cédée par le champ électrique aux charges pour les mettre en mouvement est $\frac{dP}{d\tau} = \underline{j} \cdot \underline{E}$.

Pour calculer la moyenne au cours du temps, on peut utiliser la notation complexe: $\langle \frac{dP}{d\tau} \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{j} \cdot \underline{E}^2) = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{j}) |E|^2 = 0$ car la conductivité est imaginaire pure. Cela signifie que le champ électrique, sur une demi période, donne de l'énergie aux charges pour les accélérer et sur une demi période, il prend de l'énergie aux charges pour les ralentir. En moyenne au cours du temps, il ne donne pas, il ne prend pas d'énergie aux charges.

5. On écrit:

$$\text{rot}(\text{rot} \underline{E}) = \text{grad}(\text{div} \underline{E}) - \Delta \underline{E} = -\Delta \underline{E}$$

$$\text{rot}(\text{rot} \underline{E}) = \text{rot}(-\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \underline{B}) = -\mu_0 \underline{j} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}$$

On en déduit l'équation de propagation : $\Delta \underline{E} - \mu_0 \underline{j} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \underline{0}$.

6. On en déduit la relation de dispersion en remplaçant la solution proposée dans l'équation de propagation : $-\underline{k}^2 - \mu_0 \gamma j \omega - \mu_0 \epsilon_0 (-\omega^2) = 0$ soit $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j \mu_0 \gamma \omega = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n e^2 \mu_0}{m} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n e^2}{m \epsilon_0 c^2} = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}$ avec

$$\omega_P = \sqrt{\frac{n e^2}{m \epsilon_0}} \text{ (on a utilisé } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \text{)}.$$

Pour $\omega < \omega_P$, $\underline{k}^2$ est négatif donc $\underline{k}$ est imaginaire pur: cela signifie qu'il y a absorption sans propagation.

Pour $\omega > \omega_P$, $\underline{k}^2$ est positif donc $\underline{k}$ est réel: cela signifie qu'il y a propagation sans absorption.

7. Pour $\omega > \omega_P$ on a $k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}}$ et $\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{2c} \frac{2\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}}$.

On en déduit la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}}$: cette vitesse est supérieure à c , ce n'est pas grave car ce n'est pas une vitesse matérielle.

On en déduit la vitesse de groupe: $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}$: cette vitesse est inférieure à c , ce qui est cohérent car la vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie, cette vitesse a du sens physique. Ces deux vitesses dépendent de ω et sont différentes, il y a donc dispersion.

8. On calcule f_p . Les ondes radio ont une fréquence inférieure à f_p , donc les ondes ne se propagent pas dans la ionosphère, elles sont réfléchies sur la ionosphère.

Les ondes de communication sol-satellite ont une fréquence supérieure à f_p donc elles peuvent traverser la ionosphère.

IV. Exercice V: Plasma avec collisions

1. Le rapport entre la force magnétique et la force électrique est $\frac{q || \underline{V} \wedge \underline{B} ||}{q || \underline{E} ||} = \frac{VB}{E} = \frac{V}{c} \ll 1$ en prenant comme hypothèse que la vitesse d'un électron est négligeable devant la vitesse de la lumière (ce qui est le cas en mécanique non relativiste!).

2. RFD appliquée à un électron: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \underline{E} - e \vec{v} \wedge \underline{B} + m \underline{g} - \frac{m}{\tau} \vec{v} = -e \underline{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$.

Soit en régime forcé (en notation complexe) : $m j \omega \underline{v} = -e \underline{E} - \frac{m}{\tau} \underline{v}$ donc $\underline{v} = \frac{\frac{-e\tau}{m} \underline{E}}{1 + j \omega \tau}$ et par suite

$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1+j\omega\tau}\vec{E}$: loi d'ohm locale où $\frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1+j\omega\tau}$ désigne $\underline{\gamma}$ la conductivité qui ici est complexe.

3. Pour la suite, on suppose $\omega\tau \gg 1$, la conductivité approchée s'écrit donc : $\underline{\gamma} = \frac{ne^2\tau}{j\omega\tau m} = \frac{ne^2}{jm\omega}$.

4. 4.a. On a $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z e^{j(\omega t - kx)}$.

4.b. On écrit:

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \text{grad}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \text{rot}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\vec{B}) = -\mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{On en déduit l'équation de propagation : } \Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

On en déduit la relation de dispersion en remplaçant la solution proposée dans l'équation de propagation :

$$-k^2 - \mu_0\gamma j\omega - \mu_0\epsilon_0(-\omega^2) = 0 \text{ soit } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\gamma\omega = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2\mu_0}{m} = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2} \text{ avec } \omega_P = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}.$$

4.c. Il y a propagation pour k réel soit k^2 positif donc pour $\omega > \omega_P$.

V. Exercice VI: effet cave

1. On utilise l'expression de la température:

$$T_{max} = T_0 + \theta_0 \text{ et } T_{min} = T_0 - \theta_0$$

On en déduit donc $T_0 = \frac{T_{min} + T_{max}}{2} = 10^0 C$ (c'est la température moyenne) et $\theta_0 = \frac{T_{max} - T_{min}}{2} = 20^0 C$ (c'est l'amplitude des oscillations de température).

L'intervalle de temps entre T_{max} et T_{min} est une demi-période et d'après l'énoncé cela correspond à 6 mois soit $T = 1 \text{ an} = 365.24.3600 \text{ s}$.

2. $[c] = J.kg^{-1}.K^{-1}$

$$[\rho] = kg.m^{-3}$$

$$[\lambda] = W.K^{-1}.m^{-1} = J.s^{-1}.K^{-1}.m^{-1}$$

On cherche D dont l'unité est: $[D] = \left[\frac{\frac{\partial T}{\partial t}}{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}\right] = \left[\frac{z^2}{t}\right] = m^2.s^{-1}$

$$\text{On a donc } D = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

3. En notation complexe: $\underline{T} = T_0 + \underline{F}(z)e^{i\omega t}$ soit $\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = i\omega \underline{F}(z)e^{i\omega t}$ et $\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial z^2} = \underline{F}''(z)e^{i\omega t}$.

On remplace dans l'équation de diffusion qui est identique en notation réelle et en notation complexe soit:

$$i\omega \underline{F}(z)e^{i\omega t} = D \underline{F}''(z)e^{i\omega t}. \text{ On doit donc résoudre } \underline{F}''(z) - \frac{i\omega}{D} \underline{F}(z) = 0.$$

$$\text{On écrit l'équation caractéristique: } \underline{r}^2 - \frac{i\omega}{D} = 0 \text{ soit } \underline{r}^2 = \frac{i\omega}{D} = e^{i\pi/2} \frac{\omega}{D}$$

$$\text{soit } \underline{r} = \pm e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}.$$

La fonction $\underline{F}(z)$ s'écrit donc:

$$\begin{aligned} \underline{F}(z) &= Ae^{+(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} + Be^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} \\ &= Ae^{+\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} e^{i\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} + Be^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} \end{aligned}$$

Quand on s'enfonce dans le sol z augmente. Or le terme $Ae^{+\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}$ quand z tend vers l'infini, donc pour que la température soit définie, il faut que A soit nul.

On a donc $\underline{F}(z) = Be^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}$ soit la température en notation complexe:

$$\underline{T}(z, t) = T_0 + \underline{F}(z)e^{i\omega t} = T_0 + Be^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} e^{i\omega t}$$

$$= T_0 + B e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} e^{i(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}z)}.$$

On trouve la température en notation réelle en prenant la partie réelle de la température en complexe soit:

$$T(z, t) = T_0 + B e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}z)$$

On trouve B avec la condition aux limites $T(z = 0, t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t) = T_0 + B \cos(\omega t)$ soit $B = \theta_0$.

La température dans le sol est donc $T(z, t) = T_0 + \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}z)$

le terme de phase $\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}z$ montre qu'il s'agit d'une onde de température qui se propage selon $+Oz$

Le terme $\theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}$ diminue quand z augmente soit quand l'onde se propage donc l'amplitude de l'onde diminue quand on s'enfonce dans le sol. Ce qui signifie que plus on est en profondeur et plus les variations de température autour de la température moyenne T_0 sont faibles. Ainsi lorsque la température varie entre -10^0C et 30^0C entre l'hiver et l'été à la surface de la Terre, en profondeur, dans une cave ou dans une grotte la température varie sur un intervalle de température moins grand: c'est l'effet cave. A la profondeur z , on a:

$$T_{min}(z) = T_0 - \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} \text{ et } T_{max}(z) = T_0 + \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}$$

